第 2 章　空間中的平面與直線

2-1　空間中的平面方程式

主題1　平面的法向量與標準式　　　配合課本P.80~P.87

1.法向量

在空間中，給定一個平面E，則與此平面任一法線平行的非零向量$\overrightarrow{n}$稱為此平面E的法向量。

2.平面方程式

(1)平面的點法式

若$\overrightarrow{n}=(a,b,c)$是平面$E$的一個法向量，且$A(x_0,y_0,z_0)$為平面$E$上一點，則平面$E$的方程式為$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。

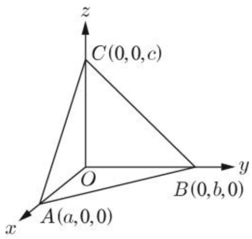
(2)平面的一般式

在空間坐標系中，平面的方程式都可表示成

$$ax+by+cz+d=0$$

的形式，其中a、b、c不全為 0，且$\overrightarrow{n}=(a,b,c)$為此平面的一個法向量。

(3)平面的截距式



①截距：若平面E與x軸、y軸和z軸分別交於$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$和$C(0,0,c)$，此時a、b和c依序稱為E的x截距、y截距和z截距，如右圖所示。

②截距式

若a、b、c分別為平面E的x截距、y截距和z截距，且$abc\neq 0$，則平面E的方程式為

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

1	例題	點法式 1	配合課本例題 1

試求通過點 $A(4,2,3)$ 且以 $\overrightarrow{n}=(2,3,-1)$ 為法向量的平面方程式。

解

已知平面過點 $A(4,2,3)$，且 $\overrightarrow{n}=(2,3,-1)$ 為平面的一個法向量

利用平面的點法式可得平面方程式為 $2(x-4)+3(y-2)+(-1)(z-3)=0$
整理得 $2x+3y-z-11=0$

1	練習

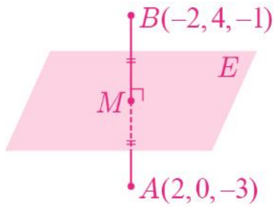
已知空間中一點 $A(3,-3,5)$ 在平面 E 上的垂足為 $B(2,1,-2)$，試求平面 E 的方程式。
解

$\overrightarrow{BA}=(1,-4,7)$ 為平面 E 的法向量

利用平面的點法式可得平面方程式為 $(x-2)-4(y-1)+7(z+2)=0$
整理得 $x-4y+7z+16=0$

2	例題	點法式 2	配合課本例題 2

已知空間中兩點 $A(2,0,-3)$、$B(-2,4,-1)$，試求垂直直線 AB 且通過 A、B 中點的平面方程式。
解



設所求平面為 E，則 $\overrightarrow{AB}=(-4,4,2)=-2(2,-2,-1)$ 垂直平面 E

取 $(2,-2,-1)$ 為平面 E 的一個法向量
可令平面 E 方程式為 $2x-2y-z+d=0$

又 $\overline{AB}$ 的中點 $M(\frac{2+(-2)}{2},\frac{0+4}{2},\frac{(-3)+(-1)}{2})=(0,2,-2)$ 為 E 上一點

代入解得 $d=2$
故平面 E 的方程式為 $2x-2y-z+2=0$

2	練習

已知空間中兩點 $A(1,2,3)$ 、 $B(6,-3,8)$，若 P 點在 $\overline{AB}$ 上且滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=4:1$，試求通過 P 點且與直線 AB 垂直的平面方程式。

解

由分點公式知 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{1+4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{1+4}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{5}(1,2,3)+\dfrac{4}{5}(6,-3,8)=(5,-2,7)$

所以 P 點坐標為 $(5,-2,7)$

取 $\overrightarrow{PB}=(1,-1,1)$ 為平面 E 的一個法向量

故此平面方程式為 $x-y+z=14$

3	例題	過三點求平面	配合課本例題 3

已知空間中三點 $A(2,1,3)$ 、 $B(4,-3,-2)$ 、 $C(5,-2,-1)$，試求過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式。

解

設平面 E 為所求平面

平面 E 的法向量垂直 $\overrightarrow{AB}=(2,-4,-5)$ 與 $\overrightarrow{AC}=(3,-3,-4)$

因此 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}-4 & -5\\ -3 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -3\end{vmatrix})=(1,-7,6)$

取 $(1,-7,6)$ 為平面 E 的法向量

則所求平面 E 可設為 $x-7y+6z+d=0$

又因平面 E 通過 $A(2,1,3)$ ，代入可解得 $d=-13$

故 $x-7y+6z-13=0$ 為所求平面方程式

3	練習

已知空間中三點 $A(1,-1,1)$ 、 $B(2,1,2)$ 、 $C(5,2,0)$ ，試求過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式。

解

設平面 E 為所求平面

如圖，平面 E 的法向量垂直 $\overrightarrow{AB}=(1,2,1)$ 與 $\overrightarrow{AC}=(4,3,-1)$

因此 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix})=(-5,5,-5)=-5(1,-1,1)$

平行的向量皆為平面 E 的法向量，取 $(1,-1,1)$ 為平面 E 的法向量

則所求平面 E 可設為 $x-y+z+d=0$

又因平面 E 通過 $C(5,2,0)$ ，代入可解得 $d=-3$

故 $x-y+z-3=0$ 為所求平面方程式

4	例題	截距式 1

已知空間中三點 $A(3,0,0)$ 、 $B(0,4,0)$ 、 $C(0,0,5)$ ，試求過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式。

解

通過 $A(3,0,0)$ 、 $B(0,4,0)$ 、 $C(0,0,5)$ 三點的平面可寫為 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$

化簡可得 $20x+15y+12z=60$

4	練習

已知空間中三點 $A(2,0,0)$ 、 $B(0,-3,0)$ 、 $C(0,0,4)$ ，試求過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式。

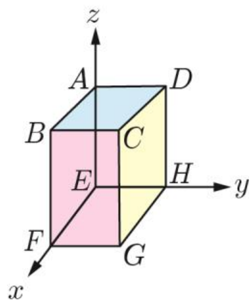
解

通過 $A(2,0,0)$ 、 $B(0,-3,0)$ 、 $C(0,0,4)$ 三點的平面可寫為 $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1$

化簡可得 $6x-4y+3z=12$

5	例題	截距式 2	配合課本例題 4

如圖，將長方體 $ABCD-EFGH$ 置於一個坐標空間中，其中 E 為原點，F 、 H 、 A 分別落在 x 、 y 、 z 軸的正向，已知 $C(3,1,2)$ ，試求平面 FHA 的方程式。



解

如圖，已知 E 為原點 $(0,0,0)$ 且 $C(3,1,2)$

可知 $\overline{EF}=3$ 、 $\overline{EH}=1$ 、 $\overline{AE}=2$

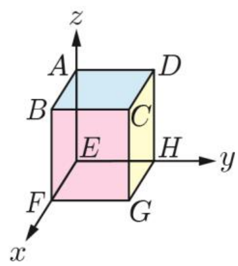
因此，可得 F 、 H 、 A 三點的坐標為 $F(3,0,0)$ 、 $H(0,1,0)$ 、 $A(0,0,2)$

又平面 FHA 通過 $F(3,0,0)$ 、 $H(0,1,0)$ 、 $A(0,0,2)$ 三點

所以平面 FHA 的方程式為 $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$

5	練習

如圖， $\overline{EF}=2$ 、 $\overline{EH}=3$ 、 $\overline{EA}=4$ ，若 R 是 $\overline{EF}$ 的中點、 S 在 $\overline{EH}$ 上且滿足 $\overline{ES}=2\overline{SH}$ ，試求通過 R 、 S 、 A 三點的平面方程式。



解

已知 R 是 $\overline{EF}$ 的中點且 $\overline{EF}=2$ ，所以 $R(1,0,0)$

$\overline{ES}=2\overline{SH}$ 且 $\overline{EH}=3$ ，所以 $S(0,2,0)$

$\overline{EA}=4$ ，所以 $A(0,0,4)$

則通過 R 、 S 、 A 三點的平面方程式為 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$

主題2　兩平面的夾角　　　　配合課本P.88~P.89

1.兩平面的夾角

設$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_2}$分別是平面E_1與E_2的法向量，且θ為$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_2}$的夾角，則平面E_1與E_2的夾角為θ 以及$180°-\theta$，且$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$。

2.兩平面垂直與其法向量的關係

當兩平面垂直時，其夾角等於$90°$，此時法向量$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_2}$的夾角亦等於$90°$，故法向量$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_2}$互相垂直。反之，若兩平面的法向量$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_2}$互相垂直，則這兩平面互相垂直。

6	例題	兩平面的夾角	配合課本例題 5

試求兩平面E_1：$x+2y+z=1$、E_2：$x-y-2z=2$的夾角。

解

由方程式的係數可知$\overrightarrow{n_1}=(1,2,1)$、$\overrightarrow{n_2}=(1,-1,-2)$分別為$E_1$與$E_2$的一個法向量

設θ為$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$的夾角

則$\cos\theta=\dfrac{1\times1+2\times(-1)+1\times(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=-\dfrac{3}{6}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\theta=120°$

因此，平面E_1與E_2之夾角為$120°$與其補角$60°$

6	練習

試求兩平面 E_1 ： $2x-3y-z=5$ 、 E_2 ： $3x-y+2z=4$的夾角。

解

由方程式的係數可知 $\overrightarrow{n_1}=(2,-3,-1)$ 、 $\overrightarrow{n_2}=(3,-1,2)$ 分別為 E_1 與 E_2 的一個法向量

設 θ 為 $\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角

則 $\cos\theta=\dfrac{2\times3+(-3)\times(-1)+(-1)\times2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$ ，所以 $\theta=60^\circ$

因此，平面 E_1 與 E_2 之夾角為 60° 與其補角 120°

主題3 點到平面的距離 配合課本P.89~P.94

1.點到平面距離公式

空間中一點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 E ： $ax+by+cz+d=0$ 的距離為

$$d(P,E)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2.兩平行平面的距離公式

設 E_1 ： $ax+by+cz+d_1=0$ 與 E_2 ： $ax+by+cz+d_2=0$ 為空間中的兩平行平面，則 E_1 與 E_2 的距離為

$$d(E_1,E_2)=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

7	例題	點到平面的距離 1	配合課本例題 6

試求點 $P(1,2,-3)$ 到平面 E ： $2x+3y+4z-8=0$ 的距離。

解

利用點到平面距離公式： $d(P,E)=\dfrac{|2\times1+3\times2+4\times(-3)-8|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{29}}=\dfrac{12\sqrt{29}}{29}$

7	練習

若點 $P(1,2,3)$ 在平面 E ： $2x+2y-3z+8=0$ 上的投影點為 Q ，試求出 $\overline{PQ}$ 的長。

解

利用點到平面距離公式： $\overline{PQ}=d(P,E)=\dfrac{|2\times1+2\times2+(-3)\times3+8|}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{17}}=\dfrac{5\sqrt{17}}{17}$

8	例題	點到平面的距離 2	配合課本例題 7

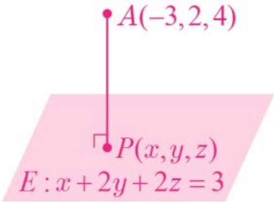
試設實數 x 、 y 、 z 滿足 $x+2y+2z=3$ ，試求 $\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}$ 的最小值。

解

由題意知若 $P(x,y,z)$ 在平面 E ： $x+2y+2z=3$ 上

則 $\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}$ 可看成平面上一點 $P(x,y,z)$ 到定點

$A(-3,2,4)$ 的距離



當 P 為 A 在平面 E 上的垂足時， $\overline{PA}$ 的長度為最小

如圖所示，即 A 到平面 E 的距離即為所求最小值

利用點到平面的距離公式得 $d(A,E)=\dfrac{|(-3)+4+8-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{9}}=2$

因此 $\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}$ 的最小值為 2

8	練習

設實數 x 、 y 、 z 滿足 $x-y+z=3$ ，試求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值。

解

先令 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\overline{OP}$

此時 $O(0,0,0)$ 為原點， $P(x,y,z)$ 為平面上的動點

$\overline{OP}$ 的最小值即為 O 點到平面 $x-y+z=3$ 的距離

則 $d(O,E)=\dfrac{|0-0+0-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

因此 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值為 3

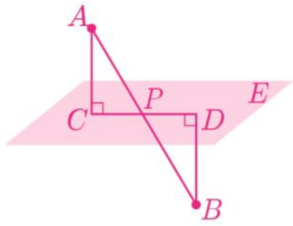
9	例題	點到平面的距離 3

若 $A(1,2,3)$、$B(-2,1,4)$ 兩點位於平面 $E:2x+2y-3z+8=0$ 的異側，且 $\overline{AB}$ 與平面 E 交於 P 點，試求 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ 之比值。

解

在平面上 E 分別做 A、B 兩點的投影點 C 與 D

則 $\Delta APC \sim \Delta BPD$



所以 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\dfrac{d(A,E)}{d(B,E)}=\dfrac{\dfrac{|2+4-9+8|}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}}}{\dfrac{|-4+2-12+8|}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}}}=\dfrac{5}{6}$

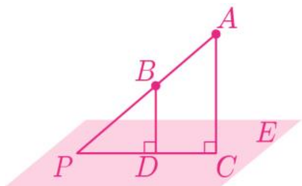
9	練習

空間中兩點 $A(1,-3,4)$、$B(2,2,-1)$ 位於平面 $E:3x-y+z-5=0$ 的同側，若直線 AB 與平面 E 交於 P，試求 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ 之比值。

解

在平面上 E 分別做 A、B 兩點的投影點 C 與 D

則 $\triangle APC \sim \triangle BPD$



所以 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\dfrac{d(A,E)}{d(B,E)}=\dfrac{\dfrac{|3+3+4-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}}{\dfrac{|6-2-1-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}}=\dfrac{5}{2}$

10	例題　　　　　　兩平行平面的距離　　　　　配合課本例題 8

已知空間中兩平行平面$E_1: x+2y-3z+1=0$與$E_2: 2x+4y-6z-3=0$，試求這兩平面E_1與E_2的距離。

解

因為E_1與E_2的x、y、z項係數不相等

所以須先將$E_1: x+2y-3z+1=0$化為$2x+4y-6z+2=0$

利用兩平行平面的距離公式得：$d(E_1,E_2)=\dfrac{|2-(-3)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-6)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{56}}=\dfrac{5\sqrt{14}}{28}$

10	練習

已知空間中兩平行平面$E_1: 3x+2y-z+5=0$與$E_2: 3x+2y-z-9=0$，試求這兩平面E_1與E_2的距離。

解

利用兩平行平面的距離公式得：$d(E_1,E_2)=\dfrac{|5-(-9)|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$

2-1　自我評量

基礎題

1.空間中三點 $A(1,1,2)$ 、 $B(-1,0,3)$ 、 $C(2,0,-1)$ ，則過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式為__ $\underline{4x-5y+3z-5=0}$ __ 。 [配合例題 3]

解

$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,1)$

$\overrightarrow{AC}=(1,-1,-3)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\times(1,-1,-3)=(4,-5,3)$ 為平面之法向量

則所求之平面方程式為 $4(x-1)-5(y-1)+3(z-2)=0$
可得 $4x-5y+3z-5=0$

2.空間中有兩平面 $E_1:2x+y-z-3=0$ 與 $E_2:x+2y+z=0$，若平面 E_1 與 E_2 的夾角為 θ，則 $\sin\theta$ 的值為__ $\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ __ 。 [配合例題 6]

解

平面 E_1 與 E_2 的法向量分別為

$\overrightarrow{n_1}=(2,1,-1)$ 、 $\overrightarrow{n_2}=(1,2,1)$

$$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\pm\frac{2+2-1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\pm\frac{1}{2}$$

則 $\sin\theta=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.點 $A(1,2,3)$ 對平面 $ax+by+cz-21=0$ 的對稱點 $A'(4,5,6)$ ，則數對 $(a,b,c)=$ __$\underline{(2,2,2)}$__ 。

[配合例題 2]

解

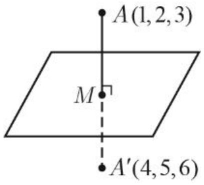
$\overrightarrow{AA'}=(3,3,3)=3(1,1,1)$

$\overline{AA'}$ 之中點為 $M(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2})$ ，取 $(1,1,1)$ 為平面法向量

則平面方程式為 $(x-\frac{5}{2})+(y-\frac{7}{2})+(z-\frac{9}{2})=0$

$\Rightarrow 2x+2y+2z-21=0$

所以 $(a,b,c)=(2,2,2)$



4.設 $A(1,-6,-5)$ 、 $B(-2,-1,3)$ ，則滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 的所有點 $P(x,y,z)$ 所成圖形的方程式為__ $\underline{3x-5y-8z-24=0}$__ 。

[配合例題 2]

解

所求平面即為 $\overline{AB}$ 之垂直平分面

先求出 $\overline{AB}$ 之中點 $M(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2},-1)$

$\overrightarrow{BA}=(3,-5,-8)$ 為平面之法向量

所求平面為 $3(x+\frac{1}{2})-5(y+\frac{7}{2})-8(z+1)=0$

可得 $3x-5y-8z-24=0$

5.已知 $A(-1,0,3)$ ，若 A 在平面 E 之投影點為 $H(4,2,5)$ ，則平面 E 之方程式為__ $\underline{5x+2y+2z-34=0}$__。

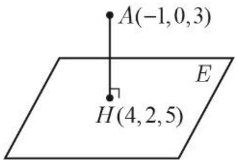
[配合例題 2]

解

$\overrightarrow{AH}=(5,2,2)$ 為平面 E 的法向量

所以平面方程式為 $5(x-4)+2(y-2)+2(z-5)=0$

可得 $5x+2y+2z-34=0$



6.若 $k\in\mathbb{R}$ ， $A(3,1,3)$ 、 $B(3,4,6)$ 、 $C(4,5,3)$ 、 $D(1,k,14)$ 四點共面，則 $k=$ $\underline{\quad 4 \quad}$ 。

[配合例題 3]

解

$\overrightarrow{AB}=(0,3,3)=3(0,1,1)$

$\overrightarrow{AC}=(1,4,0)$

$(0,1,1)\times(1,4,0)=(-4,1,-1)$

則過 A 、 B 、 C 三點的平面為

$-4(x-3)+(y-1)-(z-3)=0$

可得 $-4x+y-z+14=0$

因為 A 、 B 、 C 、 D 四點共面

所以 D 點在此平面上

$-4+k-14+14=0\Rightarrow k=4$

7.設$x+ky+z-2=0$與$x+\sqrt{2}y-z+3=0$有一夾角為$120°$，則$k=$__$\underline{\pm\sqrt{2}}$__。

[配合例題 6]

解

設$\overrightarrow{n_1}=(1,k,1)$、$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{2},-1)$

$$\cos120°=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{2}k-1}{\sqrt{1^2+k^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}$$

整理可得$k=\pm\sqrt{2}$

8.空間中二平面$E_1:x-ay+z=1$、$E_2:2x+y-z+2=0$，若$E_1\perp E_2$，則$a=\underline{\quad 1 \quad}$。

[配合例題 6]

解

$\overrightarrow{n_1}=(1,-a,1)$、$\overrightarrow{n_2}=(2,1,-1)$

若$E_1\perp E_2$，則$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

即$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2-a-1=0$

所以$a=1$

9.二平面$2x+3y-6z+3=0$、$4x+6y-12z-1=0$的距離為__$\frac{1}{2}$__。[配合例題 10]

解

$2x+3y-6z+3=0$可化為$4x+6y-12z+6=0$

與$4x+6y-12z-1=0$的距離為$\dfrac{|6-(-1)|}{\sqrt{4^2+6^2+(-12)^2}}=\dfrac{1}{2}$

10. x、y、$z\in$□ ，且滿足$x-2y+2z-5=0$，則$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2+(z+3)^2}$的最小值為__6__。

[配合例題 8]

解

設平面$E: x-2y+2z-5=0$

令$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2+(z+3)^2}=\overline{PA}$

其中$P(x,y,z)$為平面E上之動點

而A點坐標為$(-5,1,-3)$

則$\overline{PA}$最小值$=d(A,E)=\dfrac{|-5-2-6-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=6$

進階題

11.與平面$x-2y+3z-6=0$平行，且與三軸截距和為 10 之平面方程式為__$x-2y+3z-12=0$__。

解

與$x-2y+3z-6=0$平行

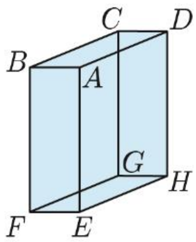
可設為$x-2y+3z=k$

其x截距為k、y截距為$-\dfrac{k}{2}$、z截距為$\dfrac{k}{3}$

則$k+(-\dfrac{k}{2})+\dfrac{k}{3}=10\Rightarrow k=12$

故方程式為$x-2y+3z-12=0$

12.如圖，一長方體 $ABCD-EFGH$，$\overline{AB}=1$、$\overline{AD}=2$、$\overline{AE}=3$，則 A 點至 $\triangle BDE$ 所在平面的距離__$\dfrac{6}{7}$__。



解

令 $A(0,0,0)$ 為原點

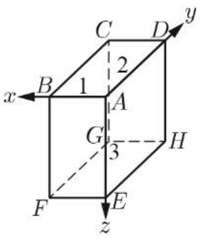
$\overleftrightarrow{AB}$ 為 x 軸、$\overleftrightarrow{AD}$ 為 y 軸、$\overleftrightarrow{AE}$ 為 z 軸

則 $B(1,0,0)$、$D(0,2,0)$、$E(0,0,3)$

過 B、D、E 三點之平面方程式為

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow 6x+3y+2z-6=0$$

則 A 點到平面的距離為 $\dfrac{|0+0+0-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{6}{7}$



13.過點 $(1,-2,1)$ 且與兩平面 $x+2y-z+1=0$ 及 $x-y+z-1=0$ 均垂直的平面方程式為__$x-2y-3z-2=0$__。

解

令 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,-1)$、$\overrightarrow{n_2}=(1,-1,1)$

$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(1,2,-1)\times(1,-1,1)=(1,-2,-3)$ 為所求平面法向量

所以平面方程式為 $(x-1)-2(y+2)-3(z-1)=0$

即 $x-2y-3z-2=0$

14.空間中，設 $A(-1,3,3)$、$B(1,3,4)$、$C(3,-5,-5)$、$D(2,2,7)$，則四面體 $ABCD$ 中，以 ABC 為底面時，高為__$\sqrt{5}$__。

解

四面體的高即為 D 點至平面 ABC 的距離

$\overrightarrow{AB}=(2,0,1)$、$\overrightarrow{AC}=(4,-8,-8)=4(1,-2,-2)$

$(2,0,1)\times(1,-2,-2)=(2,5,-4)$ 即為平面 ABC 法向量

所以平面方程式為 $2(x+1)+5(y-3)-4(z-3)=0$

可得 $2x+5y-4z-1=0$

則 $D(2,2,7)$ 至平面的距離為 $\dfrac{|4+10-28-1|}{\sqrt{2^2+5^2+(-4)^2}}=\sqrt{5}$

混合題

15.在空間坐標中，已知點 $A(1,1,0)$、$B(0,-1,-2)$ 在平面 $E: x-2y+2z=5$ 的同側。

(1)試選出 A 點到平面 E 的距離。（單選）　答：__(B)__。

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　(E)5

(2)試求 $\overline{AB}$ 在平面 E 的投影長。答：$\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

解

(1) $d(A,E)=\dfrac{|1-2+0-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2$

故選(B)

(2) $d(B,E)=\dfrac{|0+2-4-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{7}{3}$

則 $\overline{A'B'}=\sqrt{\overline{AB}^2-(\frac{7}{3}-2)^2}$

$=\sqrt{1^2+2^2+2^2-(\frac{1}{3})^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$