

來練習一道有效數字與科學記號表示的例題。

例題 1

已知 2018 年美國的人口數為 329976959 人。

(1)將人口數取 2 位有效數字並以科學記號表示。

(2)將人口數取 3 位有效數字並以科學記號表示。

解 (1)為了取 2 位有效數字，將人口數四捨五入到千萬位，得 330000000，
且其科學記號表示為

$$3.3 \times 10^8。$$

(2)為了取 3 位有效數字，將人口數四捨五入到百萬位，得 330000000，
且其科學記號表示為

$$3.30 \times 10^8。$$

隨堂練習

流感病毒的直徑約為 100 奈米（3 位有效數字）且 1 奈米等於 10^{-7} 公分，問：
將其以科學記號表示時為多少公分？

接下來練習一道科學記號運算的例題。

例題 2

計算下列各式的值，將答案取 2 位有效數字並以科學記號表示：

$$(1)(3.0 \times 10^3) \times (4.5 \times 10^{-7}) \quad (2)(3.2 \times 10^{15}) - (7.1 \times 10^{13})$$

解 $(1)(3.0 \times 10^3) \times (4.5 \times 10^{-7}) = (3.0 \times 4.5) \times (10^3 \times 10^{-7})$
 $= 13.5 \times 10^{-4} = 1.35 \times 10^{-3} \approx 1.4 \times 10^{-3}$ 。
 $(2)(3.2 \times 10^{15}) - (7.1 \times 10^{13}) = (3.2 \times 10^{15}) - (0.071 \times 10^{15})$
 $= (3.2 - 0.071) \times 10^{15} = 3.129 \times 10^{15} \approx 3.1 \times 10^{15}$ 。

隨堂練習

計算下列各式的值，將答案取 2 位有效數字並以科學記號表示：

$$(1)(3.4 \times 10^{-6}) \div (8.0 \times 10^4) \quad (2)(6.4 \times 10^{12}) + (2.8 \times 10^{11})$$

來看一道應用問題。

例題 3

已知太陽的體積約為 1.41×10^{18} 立方公里，且地球的體積約為 1.08×10^{12} 立方公里，試問：太陽的體積為地球的幾倍？（將答案取 2 位有效數字並以科學記號表示。）

解 $(1.41 \times 10^{18}) \div (1.08 \times 10^{12}) = \frac{1.41 \times 10^{18}}{1.08 \times 10^{12}} = 1.305 \times 10^6 \approx 1.3 \times 10^6$ 。

故太陽的體積為地球的 1.3×10^6 倍。

隨堂練習

亞洲是世界上最大的洲，其面積約為 4.46×10^7 平方公里；大洋洲是世界上最小的洲，其面積約為 8.54×10^6 平方公里。試問：亞洲的面積比大洋洲大多少？（將答案取 2 位有效數字並以科學記號表示）

乙 常用對數

科學記號 $a \times 10^n$ 的形式簡潔地表示很大或很小的數，其中的「10 的次方」可以幫助我們看出此數的大小。

事實上，任意正數 b 都可化成「10 的次方」的形式，而這個次方（也稱為指數）的值我們以符號 $\log b$ 表示，即

$$b = 10^{\log b},$$

並稱 $\log b$ 為 b 的**常用對數**。例如： $2 = 10^{\log 2}$,

$$0.5 = 10^{\log 0.5}。$$



約翰·納皮爾

（John Napier，1550～1617）對數的發明者，使得科學界許多繁複的計算可以簡化。

常用對數的定義

設 $b > 0$ ，當實數 a 滿足 $b = 10^a$ 時，這個指數的值 a 可用符號 $\log b$ 表示，即

$$b = 10^{\log b},$$

並稱 $\log b$ 為 b 的**常用對數**。

練習利用常用對數將任意正數表為「10 的次方」的形式。

例題 4

(1)利用常用對數將 2.7 表為「10 的次方」的形式。

(2)求 $10^{\log 3.14}$ 的值。

解 (1)根據常用對數的定義($b = 2.7$)，得 $2.7 = 10^{\log 2.7}$ 。

(2)根據常用對數的定義($b = 3.14$)，得 $10^{\log 3.14} = 3.14$ 。

隨堂練習

(1)利用常用對數將 0.02 表為「10 的次方」的形式。

(2)求 $10^{\log 120}$ 。

從常用對數的定義中發現，若將 b 寫成「10 的次方」，即 $10^{\square}$ 的形式，則 $\square$ 的值可以用符號 $\log b$ 表示，也就是說，

「求 $\log b$ 的值」等同於「求 b 是 10 的幾次方」

例如：

(1)因為 $1000 = 10^3$ ，所以 $\log 1000 = 3$ 。

(2)因為 $0.01 = 10^{-2}$ ，所以 $\log 0.01 = -2$ 。

例題 5

求下列各數的值：

(1) $\log 1$ 。

(2) $\log 100$ 。

(3) $\log 0.001$ 。

- 解** (1)因為 $1=10^0$ ，所以 $\log 1=0$ 。
(2)因為 $100=10^2$ ，所以 $\log 100=2$ 。
(3)因為 $0.001=10^{-3}$ ，所以 $\log 0.001=-3$ 。

隨堂練習

- (1)求 $\log 10000$ 的值。 (2)求 $\log \frac{1}{10}$ 的值。

利用常用對數的定義練習一道指數與常用對數轉換與求值的問題。

例題 6

已知 $t = \log 13$ ，求下列各數的值：

- (1) 100^t 。 (2) $10^t + 10^{-t}$ 。
-

解 依題意得 $13 = 10^{\log 13} = 10^t$ 。

$$(1) 100^t = (10^2)^t = (10^t)^2 = 13^2 = 169。$$

$$(2) 10^t + 10^{-t} = 10^t + (10^t)^{-1} = 13 + 13^{-1} = 13 + \frac{1}{13} = \frac{170}{13}。$$

隨堂練習

已知 $t = \log 5$ ，求下列各數的值：

- (1) 100^t 。 (2) $10^t + 10^{-t}$ 。

仿照單元 1 中使用十分逼近法求 $\sqrt{2}$ 近似值的方法可探討 $\log b$ 的近似值，以 $\log 2$ 為例，由 $2 = 10^{\log 2}$ ，利用計算機列表如下。

判斷 2 所在的範圍	► $\log 2$ 的範圍
(1) 由 $10^0 = 1, 10^1 = 10$ 可得 $10^0 < 2 = 10^{\log 2} < 10^1$ 。	$0 < \log 2 < 1$
(2) 由 $10^{0.1} \approx 1.259, 10^{0.2} \approx 1.585, 10^{0.3} \approx 1.995,$ $10^{0.4} \approx 2.512$ 可得 $10^{0.3} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.4}$ 。	$0.3 < \log 2 < 0.4$
(3) 由 $10^{0.30} \approx 1.995, 10^{0.31} \approx 2.042$ 可得 $10^{0.30} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.31}$ 。	$0.30 < \log 2 < 0.31$
(4) 由 $10^{0.301} \approx 1.9999, 10^{0.302} \approx 2.0045$ 可得 $10^{0.301} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.302}$ 。	$0.301 < \log 2 < 0.302$
(5) 由 $10^{0.3010} \approx 1.9999, 10^{0.3011} \approx 2.0003$ 可得 $10^{0.3010} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.3011}$ 。	$0.3010 < \log 2 < 0.3011$
N	N

綜合以上可得 $\log 2 = 0.301L \approx 0.30$ 。繼續重複以上的步驟，每次將求得的 $\log 2$ 的範圍再細分成 10 等分，所得的小數就會增多一位，這樣的近似值也就更為精確。

其實，計算機也可以快速地得到 $\log 2$ 的近似值，只要依序按下 2 $\log$ 如圖 2 所示，就可得到

$$\log 2 \approx 0.301029995。$$



▲ 圖 2

例題 7

求 $\log 1.34$ 的值（四捨五入到小數點以下第 4 位）。

解 利用計算機，依序按下

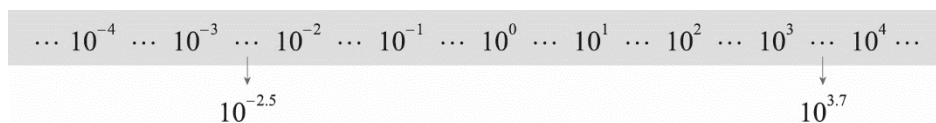
1.34 **log**

可得

$$\log 1.34 \approx 0.1271。$$

最後，介紹利用常用對數將一個數化成「10 的次方」的形式來估計其大小。因為任意正數 b 可表為 $10^{\log b}$ ，所以只要知道 $\log b$ 的值，就可以知道 b 的範圍，以兩個例子說明如下：

- (1) 若 $\log b = 3.7$ ，則 $b = 10^{\log b} = 10^{3.7}$ ，可得 $10^3 < 10^{3.7} < 10^4$ ，即 $1000 < b < 10000$ ，因此 b 的整數部分是 4 位數。
- (2) 若 $\log b = -2.5$ ，則 $b = 10^{\log b} = 10^{-2.5}$ ，可得 $10^{-3} < 10^{-2.5} < 10^{-2}$ ，即 $0.001 < b < 0.01$ ，因此 b 在小數點後第 3 位開始不為 0。



▲圖 3

最後來做一道跟引言相關的應用問題。

例題 8

盧卡斯證明了 $2^{127} - 1$ 為質數，問：此質數是幾位數？

解 解法一

利用計算機可得 $2^{127} - 1 \approx 1.7 \times 10^{38}$ 。

故此質數為 39 位數。

解法二

因為 2^{127} 的個位數不是 0，所以 $2^{127} - 1$ 和 2^{127} 位數相同。利用 $2 = 10^{\log 2}$ ，得

$$2^{127} = (10^{\log 2})^{127} = 10^{127 \times \log 2}。$$

再使用計算機求得指數部分為

$$127 \times \log 2 \approx 38.2，$$

可得 $10^{38} < 10^{38.2} < 10^{39}$ ，即 $10^{38} < 2^{127} - 1 < 10^{39}$ 。

故此質數為 39 位數。

在例題 8 的解法一中，利用計算機即可輕易求得 $2^{127} - 1$ 的近似值，並判斷其位數；然而，當數字很大（例如引言及以下提到的 $2^{82589933} - 1$ ）而無法直接使用計算機求得其近似值時，可以仿照解法二的作法來估計其位數。

隨堂練習

已知 $2^{31} - 1$ 是質數，求此質數的位數。