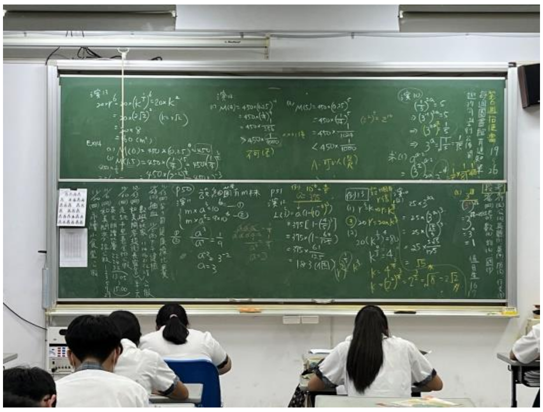
版本：龍騰版數學
單元：B1-CH3 指數
時間：2025/10/01 08:10~09:00
地點：401 教室

觀課後資料整理

重點整理

一、整數指數與指數律

1.正整數指數與指數律

設 a 為實數，n 為正整數

(1)正整數指數

$a^n=\underbrace{a\times a\times L\ L\times a\times a}_{n\text{ 個}}$，$n$ 個 a 相乘，讀作「a 的 n 次方」。

a 稱為底數，n 稱為指數。

例：$5^3=5\times5\times5$（5 的 3 次方）；

$7^6=7\times7\times7\times7\times7\times7$（7 的 6 次方）。

(2)正整數指數律

設 a，b 為實數，m，n 為正整數，則

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 。

例：$3^2\times3^4=3^{2+4}=3^6$ ；$7^5\times7^3=7^{5+3}=7^8$ 。

② $(a^m)^n=a^{mn}$ 。

例：$(5^3)^2=5^{3\times2}=5^6$；$\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$。

③ $a^n\times b^n=(ab)^n$。

例：$3^4\times5^4=(3\times5)^4=15^4$；$2^7\times3^7=(2\times3)^7=6^7$。

透過適當的定義，將指數式推廣到整數指數、有理數指數、實數指數時，仍然滿足上述三個指數律。

2.整數指數與指數律

設 a 為實數，n 為正整數

(1)正整數指數

$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a}_{n\text{ 個}}$。

(2)零指數

規定：任何非零實數的 0 次方為 1。也就是說，當 $a\neq0$ 時，$a^0=1$。

例：$5^0=1$；$(-3)^0=1$；$\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=1$；$\left(\sqrt{7}\right)^0=1$。但是，$0^0$ 不定義。

(3)負整數指數

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（其中 $a\neq0$）。

例：$2^{-5}=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$；$7^{-3}=\dfrac{1}{7^3}=\dfrac{1}{343}$。

(4)整數指數也滿足指數律

例：$3^5\times3^{-3}=3^{5-3}=3^2=9$；

$\left(2^3\right)^0=2^0=1$；

$3^{-3}\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2}=\left(3\times\dfrac{1}{9}\right)^{-2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=\left(3^{-1}\right)^{-2}=3^2=9$。

二、有理數指數與指數律

對於正實數 a 及正整數 n，整數 m

1.存在唯一的正數 b 滿足 $b^n=a^m$，這個正數 b 就是 a 的 $\dfrac{m}{n}$ 次方，記為 $a^{\frac{m}{n}}$，也就是

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$。

例：若 $b^3=5^2$，則存在唯一的 $b=5^{\frac{2}{3}}$，b 就是 5 的 $\dfrac{2}{3}$ 次方，我們有 $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3=5^2$。

2. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$。

例：$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$；$7^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{7}$；$5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}$；$7^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{7^3}$。

3.有理數指數也滿足指數律。

例：$2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；

$9^{\frac{1}{4}}=\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$；

$\left(3^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}\right)^3=\left((3\times5)^{\frac{1}{2}}\right)^3=15^{\frac{3}{2}}$。

$\boxed{\text{自我省思與改進}}$

1.要能理解指數就是次方的意思。

2.指數從國中的正整數、負整數、零，進入到有理數，也就是分數的次方。

3.舉例：

(1)$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

(2)$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(3)$2^0 = 1$

(4)$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

(5)$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

(6)$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

(7)$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

4.指數也可以擴展到實數。例如：$2^{\sqrt{3}}$。

5.段考題的出題題目：

設 x、y 為實數，$53^x = 9$，$477^y = 243$，求$\frac{2}{x} - \frac{5}{y} =$ ________。

(解)　$53 = 3^{\frac{2}{x}}$　，$477 = 3^{\frac{5}{y}}$，

相除，$3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}} = \frac{53}{477} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$，答案為$-2$。