

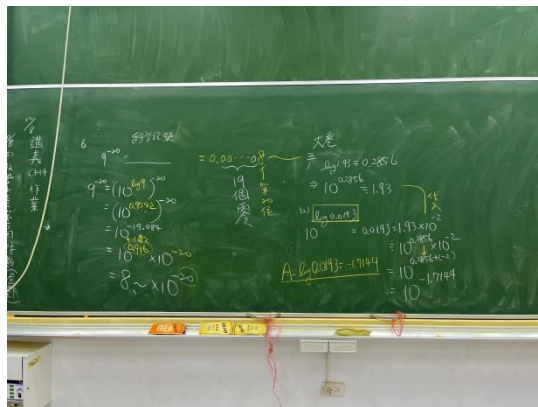
版本：龍騰版數學

單元：B1-CH3 指數

時間：2025/10/01 11:10~12:00

地點：402 教室

觀課後資料整理



重點整理

一、整數指數與指數律

1. 正整數指數與指數律

設 a 為實數， n 為正整數

(1) 正整數指數

$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}} \times a$ ， n 個 a 相乘，讀作「 a 的 n 次方」。

a 稱為底數， n 稱為指數。

例： $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ （5 的 3 次方）；

$7^6 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ （7 的 6 次方）。

(2) 正整數指數律

設 a, b 為實數， m, n 為正整數，則

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

例： $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ ； $7^5 \times 7^3 = 7^{5+3} = 7^8$ 。

② $(a^m)^n = a^{mn}$ 。

例： $(5^3)^2 = 5^{3 \times 2} = 5^6$ ； $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 。

③ $a^n \times b^n = (ab)^n$ 。

例： $3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4$ ； $2^7 \times 3^7 = (2 \times 3)^7 = 6^7$ 。

透過適當的定義，將指數式推廣到整數指數、有理數指數、實數指數時，仍然滿足上述三個指數律。

2. 整數指數與指數律

設 a 為實數， n 為正整數

(1) 正整數指數

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}。$$

(2) 零指數

規定：任何非零實數的 0 次方為 1。也就是說，當 $a \neq 0$ 時， $a^0 = 1$ 。

例： $5^0 = 1$ ； $(-3)^0 = 1$ ； $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ ； $(\sqrt{7})^0 = 1$ 。但是， 0^0 不定義。

(3) 負整數指數

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{其中 } a \neq 0)。$$

例： $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ ； $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$ 。

(4) 整數指數也滿足指數律

例： $3^5 \times 3^{-3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$ ；

$$(2^3)^0 = 2^0 = 1；$$

$$3^{-3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = \left(3 \times \frac{1}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9。$$

二、有理數指數與指數律

對於正實數 a 及正整數 n ，整數 m

1. 存在唯一的正數 b 滿足 $b^n = a^m$ ，這個正數 b 就是 a 的 $\frac{m}{n}$ 次方，記為 $a^{\frac{m}{n}}$ ，也就是

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m。$$

例：若 $b^3 = 5^2$ ，則存在唯一的 $b = 5^{\frac{2}{3}}$ ， b 就是 5 的 $\frac{2}{3}$ 次方，我們有 $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^2$ 。

2. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ， $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 。

例： $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ ； $7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$ ； $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ ； $7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3}$ 。

3. 有理數指數也滿足指數律。

例： $2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ；

$$9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}；$$

$$\left(3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left((3 \times 5)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 15^{\frac{3}{2}}。$$

自我省思與改進

1. 要能理解指數就是次方的意思。
2. 指數從國中的正整數、負整數、零，進入到有理數，也就是分數的次方。
3. 舉例：

$$(1) 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$(2) 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(3) 2^0 = 1$$

$$(4) 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$(5) 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$(6) 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

$$(7) 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

4. 指數也可以擴展到實數。例如： $2^{\sqrt{3}}$ 。

5. 段考題的出題題目：

設 x 、 y 為實數， $53^x = 9$ ， $477^y = 243$ ，求 $\frac{2}{x} - \frac{5}{y} =$ _____。

$$(\text{解}) \quad 53 = 3^{\frac{2}{x}} \quad , \quad 477 = 3^{\frac{5}{y}} ,$$

相除， $3^{\frac{2}{x} - \frac{5}{y}} = \frac{53}{477} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$ ，答案為 -2 。