

2-2 根式的運算

帶有根號的數也可以作加、減、乘、除的運算，例如： $\sqrt{2}+3$ 、 $\sqrt{2}-1$ 、 $(-2)\times\sqrt{2}$ 、 $1\div\sqrt{2}$ ，像這樣含有根號的式子，我們稱為**根式**。

1 根式的表示

多項式的簡記

$2\cdot x$ 可寫成 $2x$ 。

$(-\frac{1}{2})\cdot x$ 可寫成 $-\frac{x}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}x$ 。

$x\div 2$ 可寫成 $\frac{x}{2}$ 或 $\frac{1}{2}x$ 。

根式的簡記

$2\cdot\sqrt{2}$ 可寫成 $2\sqrt{2}$ 。

$(-\frac{1}{2})\times\sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{2}\div 2$ 可寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

根式的簡記

若 $a\neq 0$ 且 b 為正數，則：

$$(1) a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$$

$$(2) \sqrt{b}\div a=\frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

整數與根式的乘法 $3\times 2\sqrt{2}=3\times 2\times\sqrt{2}=6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ ，利用同樣的方法，我們可以做整數或分數與根式的運算。

放大

隨堂練習

加強

計算下列各根式：

$$(1) (-5)\times 2\sqrt{3}$$

解
▲
▼

$$(2) (-\frac{4}{3}\sqrt{2})\times (-6)$$

解
▲
▼

$$(3) (-4\sqrt{2})\div 6$$

解
▲
▼

2 根式的乘法

動腦 巧問快答

由前面的說明可以得到，若 a 、 b 、 c 為正數或 0 時， $a\times b\sqrt{c}=(a\times b)\times\sqrt{c}$ 。那麼 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 是否等於 $\sqrt{a\times b}$ 呢？我們利用下面的例子來說明：
 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2$ ，而 $2=\sqrt{4}=\sqrt{2\times 2}$ ，因此 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2\times 2}$ 。

那麼 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2\times 3}(\sqrt{6})$ 呢？
因為 $(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})$

$$=(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})$$

$$=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2$$

$$=2\times 3$$

而且 $(\sqrt{2\times 3})^2=2\times 3$

由於 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2\times 3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$ 。
事實上，若 $a\geq 0$ ， $b\geq 0$ ，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ 。

根式的乘法運算

若 $a\geq 0$ ， $b\geq 0$ ，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ 。

例 1 根式的乘法運算

加強

求下列各根式的乘積：

$$(1) \sqrt{3}\times\sqrt{7}$$

解
▲
▼

$$(2) 3\sqrt{3}\times(-2\sqrt{5})$$

解
▲
▼

放大

隨堂練習

1. 求下列各根式的乘積：

$$(1) \sqrt{5}\times\sqrt{14}$$

解
▲
▼

$$(2) (-2\sqrt{3})\times(4\sqrt{2})$$

解
▲
▼

2. 如圖，已知長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求此長方形的面積。



放大

例 2 比較根式的大小

基礎

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小關係。

解
▲
▼

放大

隨堂練習

比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小關係。

解
▲
▼

3 根式的除法

前面學過 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 3}$ （即 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ）呢？
比較下面兩個式子：

$$(1) \sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\text{且 } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \sqrt{2 \div 3} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\text{且 } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

又 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 、 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 均為正數，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ；事實上，若 $a \geq 0$ 、 $b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

根式的除法運算

若 $a \geq 0$ 、 $b > 0$ ，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ 。

例 3 根式的除法運算

計算下列各式：

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{7}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

解

解

隨堂練習

計算下列各式：

$$(1) \sqrt{48} \div \sqrt{8}$$

$$(2) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \div \sqrt{\frac{2}{3}}$$

解

解