1-3 常用的三角函數公式

主題一 正弦、餘弦的和角公式與差角公式

配合課本 P.45～P.50

▒ 對於任意角 α 與 β，

(1) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

(3) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

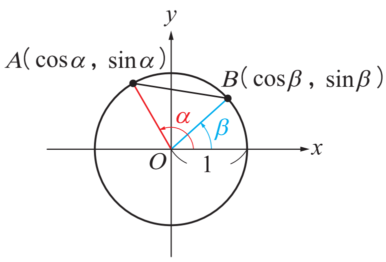
(4) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$。

證明

為了方便討論，先將條件限制在 $0^\circ\leq\beta<\alpha<360^\circ$ 且 $0^\circ<\alpha-\beta<180^\circ$。

(1) **$\cos(\alpha-\beta)$**：

在坐標平面上給定圓心在原點，半徑為 1 的單位圓，若標準位置角 α、β 的終邊分別交單位圓於 A、B 兩點，則 A、B 兩點的坐標分別為 $(\cos\alpha，\sin\alpha)$、$(\cos\beta，\sin\beta)$，如右圖所示。



在$\triangle AOB$ 中，$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\angle AOB=\alpha-\beta$，

故由餘弦定理可得

$\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$ ……………①

另外，由距離公式可得

$\overline{AB}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$

$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$ ……………②

由①、②兩式可知 $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，

故得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

(2) **$\cos(\alpha+\beta)$**：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

(3) **$\sin(\alpha+\beta)$**：

$\sin(\alpha+\beta)=\cos(90^\circ-(\alpha+\beta))=\cos((90^\circ-\alpha)-\beta)$

$=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

(4) **$\sin(\alpha-\beta)$**：

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$。

例題 1　和角與差角公式的基本運算(1)

配合課本例題 1

試求下列各值。

(1) $\cos 41^\circ \cos 71^\circ + \sin 41^\circ \sin 71^\circ$。

(2) $\cos 77^\circ \cos 43^\circ - \sin 43^\circ \sin 77^\circ$。

解

Notes

注意餘弦的和角差角公式中間之正負號。

類題

試求下列各值。

(1) $\cos 77^\circ \cos 122^\circ + \sin 77^\circ \sin 122^\circ$。

(2) $\cos 27^\circ \cos 123^\circ - \sin 27^\circ \sin 123^\circ$。

解

例題 2　和角與差角公式的基本運算(2)

配合課本例題 2

(1) 試求 $\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ$。

(2) 試利用正弦的差角公式計算 $\sin 15^\circ$。

解

Notes

利用常用的特殊角之和角或差角去求不常用的角度。

類題

(1) 試求 $\sin 55^\circ \cos 25^\circ - \cos 55^\circ \sin 25^\circ$。

(2) 試利用正弦的和角公式計算 $\sin 105^\circ$。

解

例題 3 和角與差角公式的基本運算(3)

常見段考題

試求 $\sin 19^\circ \cos 79^\circ - \sin 71^\circ \cos 11^\circ$之值。

解

類題

試求 $\sin 67^\circ \cos 83^\circ + \sin 23^\circ \cos 7^\circ$之值。

解

例題 4 利用和角、差角公式求三角比(1)

配合課本例題 3

已知 α，β 均為銳角，$\sin\alpha = \frac{4}{5}$，$\cos\beta = \frac{5}{13}$，試回答下列問題。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$。 (2) $\cos(\alpha+\beta)$。 (3) $\alpha+\beta$ 為第幾象限角？

解

類題

設 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$，$180^\circ < \beta < 270^\circ$，且 $\sin\alpha = \frac{13}{14}$，$\sin\beta = -\frac{11}{14}$，則 $\cos(\alpha-\beta) =$ ________。

解

例題 5　利用和角、差角公式求三角比(2)

常見段考題

在$\triangle ABC$中，已知$\cos A=\dfrac{1}{7}$，$\cos B=\dfrac{11}{14}$，試求$\cos C$的值。

解

類題

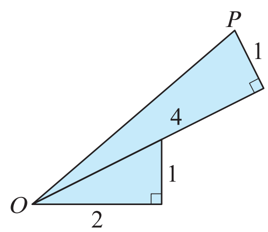
在$\triangle ABC$中，已知$\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=-\dfrac{5}{13}$，試求$\sin C$的值。

解

例題 6　利用和角公式求高

常見段考題

藝術家卡特蘭在廣場中央設計了一座雕像，雕像是由兩個直角三角形組合而成，底部三角形的兩股分別是 2 公尺及 1 公尺，上方三角形的兩股分別是 4 公尺及 1 公尺，如右圖，則雕像的最頂端P點距離地面多少公尺？



解

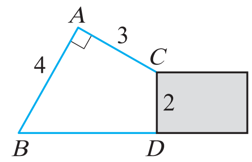
素養題

Notes

畫輔助線：由P點作垂線交地面於H點，觀察$\triangle POH$。

類題

如右圖，露營區有一塊矩形巨石，高 $\overline{CD}=2$ 公尺，小毅帶了一個帳篷架在巨石旁，作為野炊的基地，帳篷尺寸 $\overline{AB}=4$ 公尺，$\overline{AC}=3$ 公尺，$\angle A=90^\circ$。今天小毅打算在 A 處掛一盞露營燈，試問 A 處距離地面的高度為多少公尺？ 素養題



解

主題二 正切的和角公式與差角公式

配合課本 P.50 ～ P.53

1. 正切的和角公式與差角公式：

當 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 均有意義時，

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$。

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$。

證明

利用商式關係及正弦、餘弦的和角公式與差角公式可得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\text{（分子、分母同除以 }\cos\alpha\cos\beta\text{）}$$

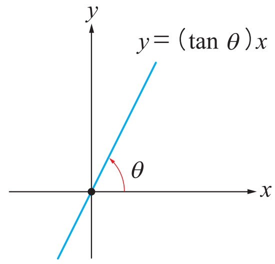
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}。$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}。$$

2. **直線的斜率與斜角：**

坐標平面上，當直線不為鉛垂線時，其斜角的正切值即為其斜率，如右圖所示。以直線 $y=2x$ 為例，其斜角 θ 滿足 $\tan\theta=2$。

註：若 $\tan\theta$ 無意義，則 $\theta=90^\circ$，直線為鉛垂線。



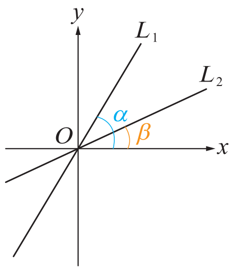
3. **利用正切的差角公式求兩直線之夾角：**

設 L_1 的斜角為 α，L_2 的斜角為 β，其中 $\alpha>\beta$，則 L_1 的斜率 $m_1=\tan\alpha$，L_2 的斜率 $m_2=\tan\beta$。令 θ 為兩直線的其中一個夾角觀察以下三個情況：

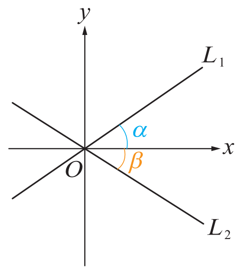
(1) $0<\beta<\alpha\Rightarrow\theta=\alpha-\beta$，如圖(一)。

(2) $\beta<0<\alpha\Rightarrow\theta=\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta$，如圖(二)。

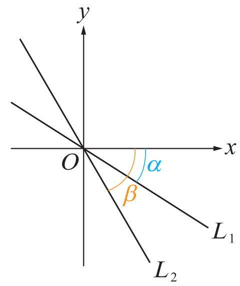
(3) $\beta<\alpha<0\Rightarrow\theta=(-\beta)-(-\alpha)=\alpha-\beta$，如圖(三)。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

由以上三個情況可得，兩直線的其中一個夾角 $\theta=\alpha-\beta$，則

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$，而另一個夾角為 $180^\circ-\theta$。

例題 7　正切的和角與差角公式

配合課本例題 4

(1) 試求 $\tan105^\circ$ 之值。

(2) 試求 $\tan68^\circ\tan23^\circ-\tan68^\circ+\tan23^\circ$ 之值。

解

Notes

(1) 利用常用的特殊角之和角或差角去求不常用的角度。

(2) 注意式子當中的 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 之和或差作為使用和角或差角公式的線索。

類題

(1) 試求 $\tan 195^\circ$ 之值。

(2) 試求 $\tan 100^\circ+\tan 20^\circ-\sqrt{3}\tan 100^\circ\tan 20^\circ$ 之值。

解

例題 8　兩直線的夾角

配合課本例題 5

試求兩直線 L_1：$2x-y+5=0$ 與 L_2：$x-3y+4=0$ 的夾角。

解

Notes

因平移不影響兩直線的夾角，故可平移兩直線使兩直線的交點恰好落在 x 軸上，比較容易觀察直線的斜角以求出兩直線的夾角。

類題

試求兩直線 L_1：$\sqrt{3}x+y+4=0$ 與 L_2：$x-\sqrt{3}y+6=0$ 的夾角。

解

主題三 二倍角公式

配合課本 P.53～P.54

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$。

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$。(其中 $\tan\theta\neq\pm1$)

說明

在正弦、餘弦及正切的和角公式中，若 α，β 兩角度相同，即令 $\alpha=\beta=\theta$，則可得

$\sin 2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$，

$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，

$\tan 2\theta=\tan(\theta+\theta)=\dfrac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$(其中 $\tan\theta\neq\pm1$)，

其中，若由平方關係 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ 或 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$，

也可得 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1$，

或 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$，

以上就是二倍角公式。

例題 9　二倍角公式

配合課本例題 6

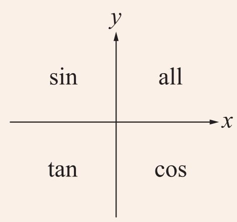
若 $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$ 且 $\cos\theta<0$，試求下列各值。

(1) $\sin 2\theta$。　(2) $\cos 2\theta$。　(3) $\tan 2\theta$。

解

Notes

請留意廣義角三角比的正負：
(1) $\sin\theta$ 在第一、二象限為正。
(2) $\cos\theta$ 在第一、四象限為正。
(3) $\tan\theta$ 在第一、三象限為正。



類題

設 $180^\circ<\theta<270^\circ$，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，試求下列各值。

(1) $\sin 2\theta$。　(2) $\cos 2\theta$。　(3) $\tan 2\theta$。

解

例題 10　求值問題

常見段考題

若 $45^\circ<\theta<90^\circ$，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，試求下列各值。

(1) $\sin 2\theta$。　(2) $\sin\theta+\cos\theta$。　(3) $\tan\theta$。

解

Notes

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$
$=1+2\sin\theta\cos\theta$。

(3) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

類題

若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

解

主題四 半角公式

配合課本 P.55 ～ P.58

(1) $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$。 (2) $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$。 (3) $\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$。

等號右邊取正或取負由 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。

說明

利用二倍角公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$，

移項化簡可得 $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，

將 θ 整個替換成 $\frac{\theta}{2}$，則上述兩式就變為 $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$，$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$，

開平方後可得 $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$，$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}。$$

上述三個結果取正或取負的判別，由 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。

例題 11　半角公式(1)

配合課本例題 7

試求 $\sin\frac{\pi}{8}$ 的值。

解

Notes

(1) 請注意半角公式取正或取負的判別，由 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。

(2) $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$。

類題

試求 $\cos\frac{\pi}{8}$ 及 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的值。

解

例題 12　半角公式(2)

常見段考題

已知 $270^\circ<\theta<360^\circ$ 且 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$，試求 $\cos\frac{\theta}{2}$ 之值。

解

Notes

$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$。

類題

已知 $0^\circ<\theta<180^\circ$ 且 $\cos\theta=-\frac{7}{25}$，則 $\tan\frac{\theta}{2}=$________。

解

1-3 實力演練

基礎題

1. 試求 $\cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ$ 之值。 主題一

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A = -\frac{12}{5}$，$\sin B = \frac{4}{5}$，則 $\tan C$ 的值為何？ 主題二

3. 設 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$，$90^\circ < \beta < 180^\circ$，且 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$，$\tan \beta = -2$，則 $\alpha + \beta =$ ________。

主題二

4. 設 $45^\circ<\theta<90^\circ$，且 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，則 $\tan 2\theta=$________。 主題三

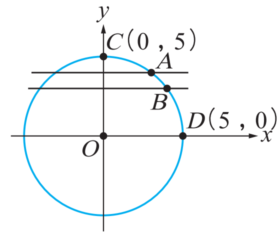
5. 有一直角三角形的斜邊長為 8，若此直角三角形其中一個內角為銳角 θ，則此直角三角形的面積為何？(單選)
(A) $16\sin\theta$ (B) $16\sin 2\theta$ (C) $16\cos 2\theta$
(D) $24\sin 2\theta$ (E) $24\cos 2\theta$ 主題三

6. 已知 $180^\circ<\theta<360^\circ$，且 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，試求 $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 之值。 主題四

進階題

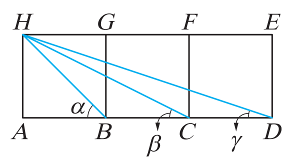
7. 試求 $\sin 340^\circ\cos 280^\circ-\sin 100^\circ\cos 160^\circ$之值。 主題一

8. 如右圖，在坐標平面上圓 O 半徑為 5，若兩直線 $y=4$，$y=3$ 分別與圓 O 在第一象限交於 A，B，則 $\cos\angle AOB=$________。 主題一



9. 試求 $\tan 69^\circ \tan 24^\circ - \tan 69^\circ + \tan 24^\circ$ 之值。 主題二

10. 如右圖，四邊形 $ABGH$，四邊形 $BCFG$，四邊形 $CDEF$ 均為正方形，若 $\angle ABH=\alpha$，$\angle ACH=\beta$，$\angle ADH=\gamma$，試求 $\alpha+\beta+\gamma$ 之值。 主題二



11. 若 $\sin\theta$ 為方程式 $6x^2-7x-5=0$ 之一解，試求 $\cos 2\theta$ 之值。 主題三

12. 試求函數 $y=\sin^2 2x+2\cos^2 x$ 的最大值與最小值。 主題四

13. 設 $270^\circ<\alpha<360^\circ$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，試求下列各值。

(1) $\sin 2\alpha=$ ________。

(2) $\sin\alpha-\cos\alpha=$ ________。

(3) $\cos\alpha=$ ________。

(4) $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$ ________。 主題四

混合題

14. 設 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=-\dfrac{15}{17}$，且 $270^\circ<\alpha<360^\circ$，$180^\circ<\beta<270^\circ$，試回答下列各題。

(1) $\sin(\alpha-\beta)$ 與 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值。

(2) $\alpha-\beta$ 為哪一個象限角？(單選)

(A)第一象限角

(B)第二象限角

(C)第三象限角

(D)第四象限角

(E)軸上角

主題一

解題影音

大考實戰題

15. 試問共有幾個角度 θ 滿足 $0^\circ<\theta<180^\circ$，且 $\cos(3\theta-60^\circ)$，$\cos 3\theta$，$\cos(3\theta+60^\circ)$ 依序成一等差數列？(單選)

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個
(D) 4 個　(E) 5 個

主題一

〔107.學測〕

16. 設 $0\leq\theta\leq 2\pi$。已知所有滿足 $\sin 2\theta>\sin\theta$ 且 $\cos 2\theta>\cos\theta$ 的 θ 可表為 $a\pi<\theta<b\pi$，其中 a，b 為實數，試問 $b-a$ 值為何？(單選)

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{3}{4}$　(E) 1

主題三

〔114.學測 A〕

解題影音