

2-1

點、直線與圓之間的位置關係

- 1 圓 2 點與圓的位置關係 3 直線與圓的位置關係
4 切線段 5 弦與弦心距

過去我們已經認識一些平面幾何圖形及其性質，如三角形、平行四邊形、梯形等。接下來，我們要介紹另一個常見的平面圖形。

主題 1 圓

✓ 圓

在平面上，與一個固定點距離相等的所有點，組成的圖形稱為**圓**。這個固定點稱為**圓心**，圓心到圓上任一點的連線段稱為**半徑**。如圖 1， O 點是圓 O 的圓心， $\overline{OA}$ 是圓 O 的半徑。

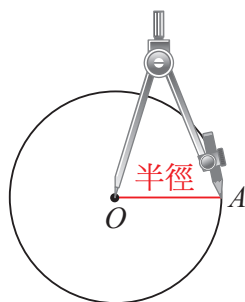


圖 1

弦

將圓上相異兩點所連接的線段稱為**弦**，通過圓心的弦稱為**直徑**，而直徑是該圓最長的弦。如圖 2， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 都是弦，其中 $\overline{CD}$ 為直徑。

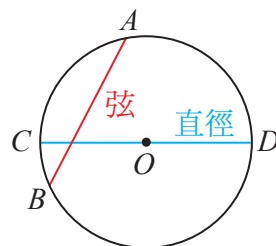


圖 2

弧

每一條弦都會將圓分成兩部分，每一部分都稱為**弧**。當弦為直徑時，這兩個弧會一樣大，稱為**半圓**。如果弦不是直徑，弧就不一樣大，其中較大的弧稱為**優弧**，較小的弧稱為**劣弧**。如圖 3， $\overline{AB}$ 將圓分成大小兩弧，兩弧皆可記為 $\widehat{AB}$ ，但為了加以區別，通常將劣弧表示為 $\widehat{AB}$ ；而優弧可在弧上另取一點 C ，表示為 $\widehat{ACB}$ 。 $\widehat{AB}$ 除了可用來表示這段弧，也可以表示它的長度。

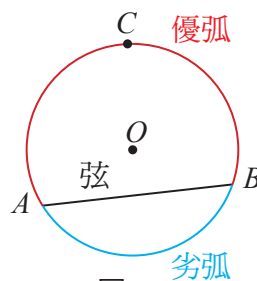


圖 3

弓形

圓的一弦將圓分成兩個弧，此弦與任一弧所圍成的圖形稱為**弓形**，如圖 4。

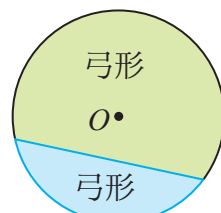


圖 4

圓心角

以圓心為頂點，兩半徑為邊所夾的角，稱為**圓心角**。如圖 5， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 都是圓心角。

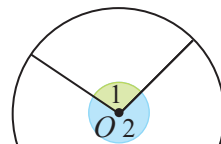


圖 5

扇形

在圓上，兩半徑與一弧所圍成的圖形，稱為**扇形**。如圖 6，半徑 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 將圓分成兩個扇形，在沒有特別指定下，我們所說的扇形 AOB 通常是指圓心角較小的扇形，如圖 6 中的藍色部分。

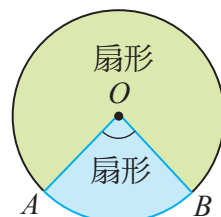
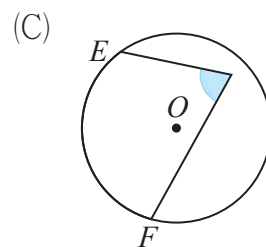
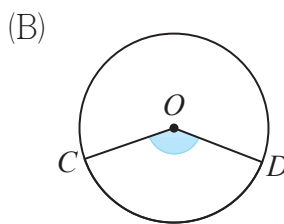
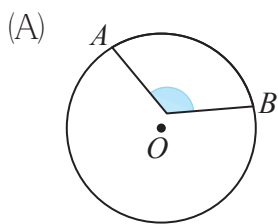


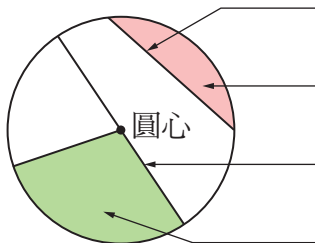
圖 6

隨堂練習

1. 下列各角何者是圓 O 的圓心角？答：_____。



2. 在下列空格中填入適當名稱。



連接圓上任兩點的線段：_____。

圓的一弦和一弧所圍成的圖形：_____。

通過圓心的弦：_____。

兩半徑和一弧所圍成的圖形：_____。

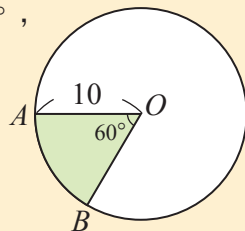
例 1

求弧長、扇形周長和面積

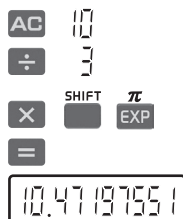
如右圖，圓 O 的半徑為 10 公分，圓心角 $\angle AOB = 60^\circ$ ，
則：(1) $\widehat{AB}$ 的長度為多少公分？

(2) 扇形 AOB 的周長為多少公分？

(3) 扇形 AOB 的面積為多少平方公分？



計算機操作



可以利用計算機上的 π 鍵，求出含有圓周率的近似值喔！



解 (1) $\widehat{AB}$ 的長度 $= 2\pi \times 10 \times \frac{60}{360}$
 $= \frac{10}{3}\pi$ (公分)。

(2) 扇形 AOB 的周長 $= \widehat{AB} + \overline{OA} + \overline{OB}$
 $= \frac{10}{3}\pi + 10 + 10$
 $= \frac{10}{3}\pi + 20$ (公分)。

(3) 扇形 AOB 的面積 $= \pi \times 10^2 \times \frac{60}{360}$
 $= \frac{50}{3}\pi$ (平方公分)。

Hint

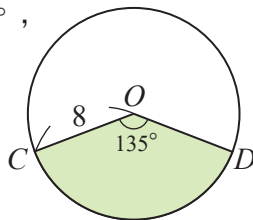
扇形周長 = 弧長 + 半徑 $\times 2$ 。

隨堂練習

如右圖，圓 O 的半徑為 8 公分，圓心角 $\angle COD = 135^\circ$ ，
則：(1) $\widehat{CD}$ 的長度為多少公分？

(2) 扇形 COD 的周長為多少公分？

(3) 扇形 COD 的面積為多少平方公分？



有些計算機上會有 π 的按鍵，這就代表圓周率的意思。
 (操作方式可參閱書末 P.[9]~[10]「計算機教學」)

例 2

已知扇形面積或弧長求圓心角

- (1) 已知一扇形的面積為 48π 平方公分，半徑為 12 公分，求此扇形的圓心角。
- (2) 已知半徑為 15 公分的圓中，有一弧長為 5π 公分，求此弧所對應的圓心角。

解

- (1) 假設圓心角為
- x°
- ，

$$\pi \times 12^2 \times \frac{x}{360} = 48\pi,$$

得 $x = 120$ ，所以圓心角為 120° 。

- (2) 假設圓心角為
- y°
- ，

$$2\pi \times 15 \times \frac{y}{360} = 5\pi,$$

得 $y = 60$ ，所以圓心角為 60° 。

Hint

也可以這樣算：

$$(1) \text{圓面積} = \pi \times 12^2 = 144\pi,$$

$$\text{扇形面積占圓面積的 } \frac{48\pi}{144\pi} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以此扇形的圓心角} = 360^\circ \times \frac{1}{3} = 120^\circ.$$

$$(2) \text{圓周長} = 2\pi \times 15 = 30\pi,$$

$$\text{弧長占圓周長的 } \frac{5\pi}{30\pi} = \frac{1}{6},$$

$$\text{所以此扇形的圓心角} = 360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ.$$

隨堂練習

- (1) 已知一扇形的面積為 2π 平方公分，半徑為 4 公分，求此扇形的圓心角。
- (2) 已知半徑為 9 公分的圓中，有一弧長為 2π 公分，求此弧所對應的圓心角。

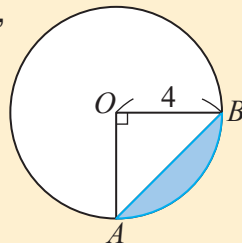
例 3

求弓形的面積與周長

如右圖，圓 O 的半徑為 4 公分，圓心角 $\angle AOB = 90^\circ$ ，

則：(1) 藍色弓形的面積為多少平方公分？

(2) 藍色弓形的周長為多少公分？



解 (1) 弓形面積 = 扇形 AOB 面積 - 直角 $\triangle AOB$ 面積

$$= \pi \times 4^2 \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

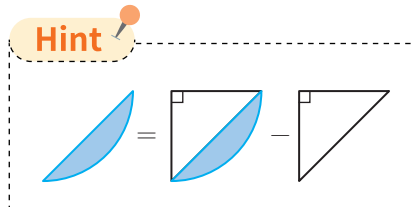
$$= 4\pi - 8 \text{ (平方公分)}。$$

(2) 弓形周長 = $\widehat{AB} + \overline{AB}$

$$= 2\pi \times 4 \times \frac{90}{360} + \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$= 2\pi + 4\sqrt{2} \text{ (公分)}。$$

Hint



學習時光機

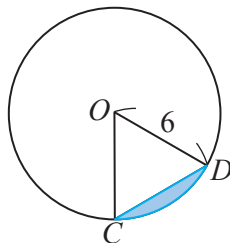
正 $\triangle$ 面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
(a 為邊長)

隨堂練習

如右圖，圓 O 的半徑為 6 公分，且 $\triangle COD$ 為正三角形，則：

(1) 藍色弓形的面積為多少平方公分？

(2) 藍色弓形的周長為多少公分？



數

學

好

好

玩

 π 謎阿

填字遊戲是一種常見的紙上益智遊戲，根據题目的提示，將答案填入對應直行或橫列的格子裡。請翻到書末 P.[4]「 π 謎阿」，利用弧長與扇形面積公式，幫助宗霖與玲誼逃離死亡森林。