

2-1 質因數分解

1 因數與倍數

2 質數與合數

3 標準分解式

 速測派

 重點回顧

 自我評量

根據因數、倍數的意義，我們可以來討論 1 和 0 這兩個數的因數與倍數：

- ① 因為任何整數 a 除以 1 的結果都是 a (即 $a \div 1 = a$)，所以任何整數都是 1 的倍數，1 是任何整數的因數。
- ② 因為 0 不可以當作除數，所以 0 不是任何整數的因數。
- ③ 因為 $0 \div a = 0 (a \neq 0)$ ，所以 0 是任何非零整數的倍數。

在國中階段，若沒有特別說明，因數都是指正因數；而倍數指的是正倍數。

例 1 因數與倍數的判別

判別下列敘述是否正確。

(1) 210 是 14 的倍數。

解 $210 \div 14 = 15$

因為 210 可以被 14 整除，

所以 210 是 14 的倍數。

#

例 1 因數與倍數的判別

判別下列敘述是否正確。

(2) 15 是 235 的因數。

解 $235 \div 15 = 15 \cdots 10$
因為 235 不可以被 15 整除，
所以 15 不是 235 的因數。

#

 隨堂練習

判別下列敘述是否正確。

(1) 91 是 7 的倍數。

☒ 是

☐ 否

(2) 11 是 121 的因數。

☒ 是

☐ 否

#

在學習前哨站，已複習曾學過的 2、5 倍數判別法，接下來我們將學習 3、4、9、11 的倍數判別法。

4 的倍數判別法

要判別一個數是不是 4 的倍數，除了直接用除法判別外，還有更簡便的方法。

例如：判別 7528 是不是 4 的倍數時，

因為 $100 = 25 \times 4$ ，所以 100 的倍數都是 4 的倍數，
而 $7528 = 75 \times 100 + 28$ ， 75×100 必為 4 的倍數，
末兩位數 28 是 4 的倍數，所以 7528 是 4 的倍數。



4 的倍數判別法

如果一個整數的末兩位數是 4 的倍數，則這個整數是 4 的倍數。

例 2 判別 4 的倍數

判別下列各數是否為 4 的倍數。

(1) 536

解 因為 536 的末兩位數 36 是 4 的倍數，
所以 536 是 4 的倍數。

#

例 2 判別 4 的倍數

判別下列各數是否為 4 的倍數。

(2) 2370

解 因為 2370 的末兩位數 70 不是 4 的倍數，
所以 2370 不是 4 的倍數。

#

 隨堂練習

有一個四位數 $23\square 4$ ，如果此數是 4 的倍數，則 $\square$ 可以填入哪些數字？

 四位數 $23\square 4$ 的末二位數中，

04、24、44、64、84 皆為 4 的倍數，

所以 $\square$ 可以填入 0、2、4、6、8。

#

 Thinking

7528 是不是 8 的倍數呢？除了直接利用除法之外，還有沒有更簡便的方法呢？（提示： $1000 = 125 \times 8$ ）

解

是，

判別該數的末三位數是否為 8 的倍數即可。

#

9 的倍數判別法

要判別 216 是不是 9 的倍數，可以先將 216 寫成 $200 + 10 + 6$ ，再透過下圖判別。

216 =

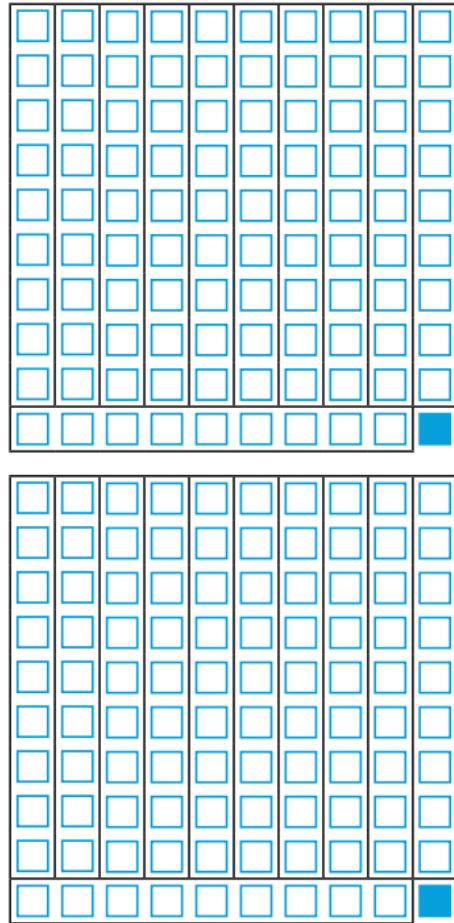
200

+

10

+

6



觀察上圖
可得：

$$\begin{aligned}
 216 &= 200 + 10 + 6 \\
 &= 2 \times 100 + 1 \times 10 + 6 \\
 &= 2 \times (99 + 1) + 1 \times (9 + 1) + 6 \\
 &= 2 \times 99 + 2 \times 1 + 1 \times 9 + 1 \times 1 + 6 \\
 &= 2 \times 99 + 1 \times 9 + (2 + 1 + 6)
 \end{aligned}$$

9 的倍數(99 、 9 都是 9 的倍數) 各位數字和

因為 $2 \times 99 + 1 \times 9$ 是 9 的倍數，所以要判別 216 是否為 9 的倍數，只要看各位數字和是否為 9 的倍數。由於 $2 + 1 + 6 = 9$ ，因此 216 是 9 的倍數。



9 的倍數判別法

加強演練題

087

如果一個整數的各位數字和是 9 的倍數，則這個整數是 9 的倍數。



3 的倍數判別法

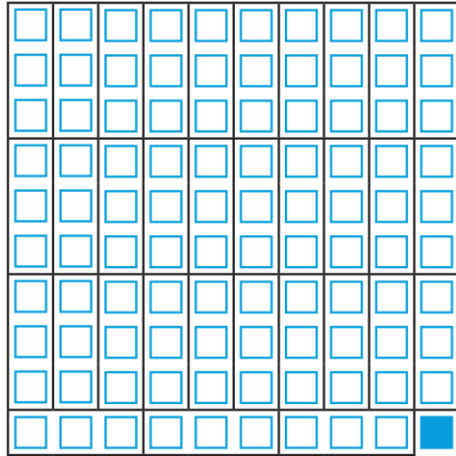
要判別 135 是不是 3 的倍數，也可以仿照「9 的倍數判別法」，先將 135 寫成 $100 + 30 + 5$ ，再透過下圖判別。

$135 =$ **100**

+

30

+

5

觀察上圖
可得：

$$\begin{aligned}
 135 &= 100 + 30 + 5 \\
 &= 1 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \\
 &= 1 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 5 \\
 &= 1 \times 99 + 1 \times 1 + 3 \times 9 + 3 \times 1 + 5 \\
 &= 1 \times 99 + 3 \times 9 + (1 + 3 + 5)
 \end{aligned}$$

$1 \times 99 + 3 \times 9$ 是 3 的倍數 (99、9 都是 3 的倍數)
 $(1 + 3 + 5)$ 是各位數字和

因為 $1 \times 99 + 3 \times 9$ 是 3 的倍數，所以要判別 135 是否為 3 的倍數，只要看各位數字和是否為 3 的倍數。由於 $1 + 3 + 5 = 9$ ，因此 135 是 3 的倍數。



3 的倍數判別法

如果一個整數的各位數字和是 3 的倍數，則這個整數是 3 的倍數。

例 3 判別 3、9 的倍數

判別 6108 是否為 3 的倍數？是否為 9 的倍數？

解 6108 的各位數字和為 $6 + 1 + 0 + 8 = 15$ ，

$$15 \div 3 = 5 ;$$

$$15 \div 9 = 1 \cdots \cdots 6$$

所以 6108 是 3 的倍數，不是 9 的倍數。

#

 隨堂練習

1. 有一個四位數 $149\square$ 是 3 的倍數，則 $\square$ 可填入哪些數字？

解

1、4、7。

#

 隨堂練習

2. 有一個四位數 $149\square$ 是 9 的倍數，則 $\square$ 可填入哪些數字？

解

4。#

 Thinking

如果一個整數是 3 的倍數，則這個整數一定是 9 的倍數嗎？

解

不一定。

例如：12、15、21……是 3 的倍數，但不是 9 的倍數。

#

▶ 11 的倍數判別法

要判別 42537 是不是 11 的倍數，可以將 42537 寫成

$$\begin{aligned}
 42537 &= 4 \times 10000 + 2 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \\
 &= 4 \times (9999 + 1) + 2 \times (1001 - 1) + 5 \times (99 + 1) + 3 \times (11 - 1) + 7 \\
 &= 4 \times 9999 + 4 + 2 \times 1001 - 2 + 5 \times 99 + 5 + 3 \times 11 - 3 + 7 \\
 &= (4 \times 9999 + 2 \times 1001 + 5 \times 99 + 3 \times 11) + (4 + 5 + 7) - (2 + 3)
 \end{aligned}$$

11 的倍數
奇數位數字和 偶數位數字和

(9999、1001、99、11 都是 11 的倍數)

所以 42537 除以 11 的餘數與 $(4+5+7)-(2+3)$ 除以 11 的餘數相同。因為 $(4+5+7)-(2+3)=11$ ，所以 42537 是 11 的倍數。

奇數位數字和

$$4+5+7=16$$

4 2 5 3 7

兩者的差 $16-5=11$ 。

偶數位數字和

$$2+3=5$$



11 的倍數判別法

如果一個整數的「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數或 0，則這個整數是 11 的倍數。



例 4 判別 11 的倍數

判別下列各數是否為 11 的倍數。

(1) 9724

解 9724 的奇數位數字和為 $7 + 4 = 11$ ，

偶數位數字和為 $9 + 2 = 11$ 。

$$11 - 11 = 0,$$

所以 9724 是 11 的倍數。

奇數位數字和 $7 + 4 = 11$

9 7 2 4

$$11 - 11 = 0$$

偶數位數字和 $9 + 2 = 11$

井

例 4 判別 11 的倍數

判別下列各數是否為 11 的倍數。

(2) 98760

解 98760 的奇數位數字和為 $9 + 7 + 0 = 16$ ，

偶數位數字和為 $8 + 6 = 14$ 。

$16 - 14 = 2$ (不是 11 的倍數或 0)，

所以 98760 不是 11 的倍數。

奇數位數字和 $9 + 7 + 0 = 16$

9 8 7 6 0

$16 - 14 = 2$

偶數位數字和 $8 + 6 = 14$

≠

隨堂練習

1. 判別 2345、123321 是否為 11 的倍數。

解

2345 的奇數位數字和是 $3 + 5 = 8$ ，

偶數位數字和是 $2 + 4 = 6$ 。

$8 - 6 = 2$ (不是 11 的倍數或 0)，所以 2345 不是 11 的倍數。

123321 的奇數位數字和是 $2 + 3 + 1 = 6$ ，

偶數位數字和是 $1 + 3 + 2 = 6$ 。

$6 - 6 = 0$ ，所以 123321 是 11 的倍數。

#

 隨堂練習

2. 有一個四位數 $7\square 36$ ，如果此數是 11 的倍數，則 $\square = ?$

解

奇數位數字和： $\square + 6$ ，

偶數位數字和： $7 + 3 = 10$ ，

$$\square + 6 - 10 = \square - 4，$$

則 $\square - 4$ 要是 11 的倍數或 0，

所以 $\square = 4$ 。

井

2 質數與合數

在國小我們學過：

- 1 如果一個大於 1 的整數，只有 1 和本身兩個因數，稱此數為**質數**。例如：2、3、5、7、11 的因數都只有 1 和本身，所以 2、3、5、7、11 都是質數。
- 2 如果一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為**合數**。例如：6 的因數有 1、2、3、6，所以 6 是合數。
- 3 1 既不是質數，也不是合數。
- 4 2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

例 5 質數與合數的判別

判別 12 和 17 這兩個數是質數還是合數？

解 12 的因數有 1、2、3、4、6、12，

所以 12 是合數。

17 的因數只有 1、17，

所以 17 是質數。

#

▶ 隨堂練習

1. 最小的質數為 2，最小的合數為 4。
2. 判別 23 和 27 這兩個數是質數還是合數？

解

23 的因數只有 1、23，

所以 23 是質數。

27 的因數有 1、3、9、27，

所以 27 是合數。

井

對於一個 100 以內的數是否為質數，有沒有方法可以篩檢呢？

古希臘的數學家埃拉托賽尼(Eratosthenes，西元前 276 — 西元前 194)發現了一個方法，可以簡化逐一判別每個數是否為質數的步驟，這個方法稱為「埃拉托賽尼篩法」，以下將利用  **探索活動** 來了解他的想法。



埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 1：因為 1 不是質數，
也不是合數，所以刪去 1。

步驟 2：剩下的數最小是 2，
圈出 2 並刪去其餘 2 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數最小是 4。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(接續下頁)



埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 3：剩下的數最小是 3，
圈出 3 並刪去其餘 3 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數最小是 9。

步驟 4：剩下的數最小是 5，
圈出 5 並刪去其餘 5 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數最小是 25。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(接續下頁)



在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 5：剩下的數最小是 7，
圈出 7 並刪去其餘 7 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數最小是 49。

步驟 6：將剩下的數全部圈起來。

❓ 此時所有圈出來的數是否都是質數？

☒ 是

☐ 否

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

井

解



Thinking

1. 由步驟 2~步驟 5 中，每個步驟圈出的數與所刪去的最小數，有什麼關係呢？

解

每個步驟所刪去的最小數是圈出的數的平方。

#

Thinking

2. 利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只需使用質數 2、3、5、7 篩檢即可，而不需使用 11 或更大的質數篩檢？

解

【解一】

步驟 5 完成後，剩下的數最小的是 11，

圈出 11 並刪去其餘 11 的倍數，

而由第 1 題可知，

刪去的數最小是 $11^2 = 121$ ，已超過 100。

(接續下頁)

Thinking

2. 利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只需使用質數 2、3、5、7 篩檢即可，而不需使用 11 或更大的質數篩檢？

解

【解二】

因為 11 的倍數中，

除了 11 以外，11 的 2、3、4、5、6、7、8、9 倍

在前面的步驟中已經全被刪除，

而 11 的 10、11、…… 倍皆會超過 100。

井

由  **探索活動** 可知，利用埃拉托賽尼篩法篩檢小於 100 的質數，只需使用 2、3、5、7 篩檢即可，且 100 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共 25 個數。