

2-2 根式的運算

帶有根號的數也可以作加、減、乘、除的運算，例如： $\sqrt{2}+3$ 、 $\sqrt{2}-1$ 、 $(-2)\times\sqrt{2}$ 、 $1\div\sqrt{2}$ ，像這樣含有根號的式子，我們稱為**根式**。

1 根式的表示

對應學習內容 N-8

多項式的簡記

$2\cdot x$ 可寫成 $2x$ 。

$(-\frac{1}{2})\cdot x$ 可寫成 $-\frac{x}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}x$ 。

$x\div 2$ 可寫成 $\frac{x}{2}$ 或 $\frac{1}{2}x$ 。

根式的簡記

$2\cdot\sqrt{2}$ 可寫成 $2\sqrt{2}$ 。

$(-\frac{1}{2})\times\sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{2}\div 2$ 可寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

根式的簡記

若 $a\neq 0$ 且 b 為正數，則：

$$(1) a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$$

$$(2) \sqrt{b}\div a=\frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

整數與根式的乘法 $3\times 2\sqrt{2}=3\times 2\times\sqrt{2}=6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ ，利用同樣的方法我們可以做整數或分數與根式的運算。

隨堂練習

計算下列各根式：

$$(1) (-5)\times 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} &= (-5)\times 2\times\sqrt{3} \\ &= (-10)\times\sqrt{3} \\ &= -10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(2) (-\frac{4}{3}\sqrt{2})\times(-6)$$

$$\begin{aligned} &= (-\frac{4}{3})\times\sqrt{2}\times(-6) \\ &= (-\frac{4}{3})\times(-6)\times\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(3) (-4\sqrt{2})\div 6$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{4}{6}\times\sqrt{2} \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$



會考觀測站

加強演練題

搭配隨堂

計算下列各根式：

$$(1) 2\times\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{6}$$

$$(2) -2\sqrt{3}\times 7$$

$$-14\sqrt{3}$$

$$(3) 4\sqrt{7}\div 2$$

$$2\sqrt{7}$$

$$(4) -\frac{9}{4}\sqrt{5}\div(-3)$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{5}$$

2 根式的乘法

由前面的說明可以得到，若 a, b, c 為正數或 0 時， $a \times b\sqrt{c} = (a \times b)\sqrt{c}$ 。
 那麼 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 是否等於 $\sqrt{a \times b}$ 呢？我們利用下面的例子來說明：
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ，而 $2 = \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2}$ ，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2}$ 。

那麼 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \times 3} (= \sqrt{6})$ 呢？

$$\begin{aligned} \text{因為 } (\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2 \\ &= 2 \times 3 \end{aligned}$$

$$\text{而且 } (\sqrt{2 \times 3})^2 = 2 \times 3$$

由於 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2 \times 3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ 。

事實上，若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

根式的乘法運算

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 1 根式的乘法運算

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

解 (1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$
 $= \sqrt{3 \times 7}$
 $= \sqrt{21}$

(2) $3\sqrt{3} \times (-2\sqrt{5})$

(2) $3\sqrt{3} \times (-2\sqrt{5})$
 $= 3 \times \sqrt{3} \times (-2) \times \sqrt{5}$
 $= 3 \times (-2) \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$
 $= -6\sqrt{15}$



會考觀測站

加強演練題

搭配例 1

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{7} \times \sqrt{11}$

隨堂練習

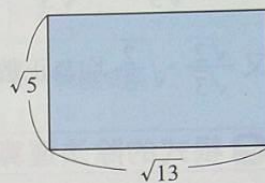
1. 求下列各根式的乘積：

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{5} \times \sqrt{14} \\ &= \sqrt{5 \times 14} \\ &= \sqrt{70} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (-2\sqrt{3}) \times (4\sqrt{2}) \\ &= (-2) \times \sqrt{3} \times 4 \times \sqrt{2} \\ &= (-2) \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= -8\sqrt{6} \end{aligned}$$

2. 如圖，已知長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求此長方形的面積。

$$\sqrt{13} \times \sqrt{5} = \sqrt{13 \times 5} = \sqrt{65}$$

所以長方形的面積為 $\sqrt{65}$ 平方公分。

例 2 比較根式的大小

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小關係。

$$\begin{aligned} \text{解 } 3\sqrt{2} &= 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18} \\ 2\sqrt{3} &= 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12} \\ \text{因為 } \sqrt{18} &> \sqrt{12}, \text{ 所以 } 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$



也可以這樣做：

$$\begin{aligned} (3\sqrt{2})^2 &= (3\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 18 \\ (2\sqrt{3})^2 &= (2\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3}) = 12 \\ \text{因為 } 18 &> 12, \text{ 所以 } 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

隨堂練習

比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小關係。

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2} &= 6 \times \sqrt{2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = \sqrt{72} \\ 5\sqrt{3} &= 5 \times \sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{75} \\ \text{因為 } \sqrt{75} &> \sqrt{72}, \text{ 所以 } 5\sqrt{3} > 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$



會考觀測站 基礎演練題 搭配例 2

比較下列根式的大小關係，將其由小到大排列：

$$8\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{6}, 4\sqrt{7}$$

$$7\sqrt{2} < 4\sqrt{7} < 5\sqrt{6} < 8\sqrt{3}$$

3 根式的除法

前面學過 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 3}$ (即 $\sqrt{\frac{2}{3}}$) 呢？

比較下面兩個式子：

$$(1) \sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\text{且 } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \sqrt{2 \div 3} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\text{且 } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

又 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 、 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 均為正數，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ；事實上，若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

根式的除法運算

若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ 。

例 3 根式的除法運算

計算下列各式：

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \sqrt{35} \div \sqrt{7} &= \sqrt{35 \div 7} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{7}{2} \div \frac{3}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2} \times \frac{6}{3}} = \sqrt{7}$$

隨堂練習

計算下列各式：

$$(1) \sqrt{48} \div \sqrt{8}$$

$$= \sqrt{48 \div 8}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$(2) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \div \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{3}} \div \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{3} \div \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{3} \times \frac{3}{2}} = \sqrt{3}$$



會考觀測站

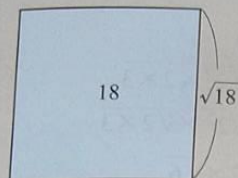
加強演練題

搭配例 3

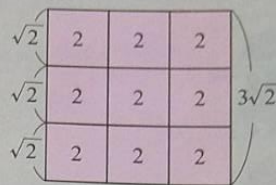
計算下列各式：

最簡根式

下圖是將面積為 18 的大正方形分成 9 個面積為 2 的小正方形。



因為大正方形的面積為 18，
所以其邊長為 $\sqrt{18}$ 。



因為面積為 2 的小正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ ，
所以大正方形的邊長為 $3\sqrt{2}$ 。

由上述可以知道 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 。

透過根式的運算，也可以得到 $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$ 。

像這種 $r\sqrt{n}$ 形式的根式，其中 r 是整數、分數或小數， n 是正整數，且將 n 化成標準分解式後，每一個質因數的次方都是 1，稱 $r\sqrt{n}$ 為**最簡根式**。

例如： $\sqrt{42}$ 、 $3\sqrt{6}$ 、 $\frac{5}{7}\sqrt{21}$ 都是最簡根式。

一個根式有下列任何一種情形時，就**不是**最簡根式：

(1) 根號內的正整數，化成標準分解式後，有任何一個質因數的次方大於 1。

例如： $\sqrt{24}$ 不是最簡根式。因為 $24 = 2^3 \times 3$ ，質因數 2 的次方為 3。

(2) 根號內有分數或小數。例如： $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 、 $\sqrt{0.7}$ 都不是最簡根式。

(3) 分母有根式。例如： $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 不是最簡根式。

隨堂練習

下列根式中，哪些是最簡根式？

$$3\sqrt{2}, \sqrt{25}, \frac{2}{3}\sqrt{6}, \frac{\sqrt{24}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \sqrt{5.1}$$

$$3\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

會考觀測站 加強演練題 搭配課文

(D) 下列根式中，哪一個是最簡根式？

(A) $\sqrt{32}$

(B) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

(C) $\sqrt{17}$

(D) $\sqrt{13}$

例 4 化為最簡根式

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{2^5}$

$$\begin{aligned}
 &\text{解 (1) } \sqrt{2^5} \\
 &= \sqrt{2^4 \times 2} \\
 &= \sqrt{2^4} \times \sqrt{2} \\
 &= 2^2 \times \sqrt{2} \\
 &= 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{24}$

$$\begin{aligned}
 &(2) \sqrt{24} \\
 &= \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} \\
 &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2 \times 3} \\
 &= 2 \times \sqrt{6} \\
 &= 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

隨堂練習

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{7^3}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{7^2 \times 7} \\
 &= \sqrt{7^2} \times \sqrt{7} \\
 &= 7 \times \sqrt{7} \\
 &= 7\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

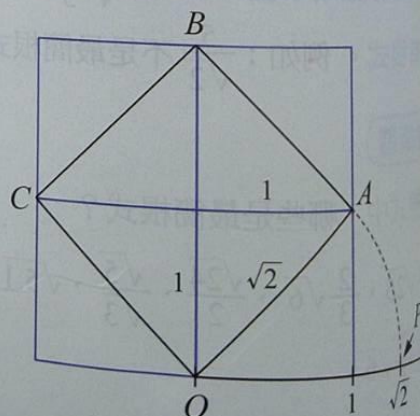
(2) $\sqrt{54}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2 \times 3^3} \\
 &= \sqrt{2 \times 3^2 \times 3} \\
 &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 3} \\
 &= 3 \times \sqrt{2 \times 3} \\
 &= 3\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

補給站 $\sqrt{2}$ 在數線上的位置

$\sqrt{2}$ 雖然不是有理數，卻能透過旋轉的方式在數線上找到它的位置，如右圖。

在 2-1 P58 曾學過：當正方形 $OABC$ 的面積為 2，其邊長為 $\sqrt{2}$ 。以頂點 O 為旋轉中心，將 $\overline{OA}$ 旋轉到數線上標示出 $\sqrt{2}$ 的位置 (P 點) 後， $\overline{OP}$ 的長度就是 $\sqrt{2}$ 。

**考****會考觀測站**

基礎演練題

搭配例 4

- 將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{3}$