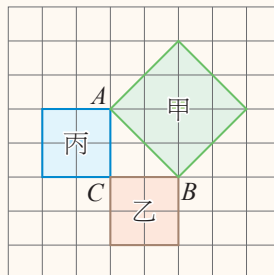




溫故啟思

右圖方格紙中，每個小方格的邊長都是 1。分別以直角三角形 ABC 的三個邊向外作正方形：

- (1) 正方形甲的面積為 8。
- (2) 正方形乙、丙的面積和為 8。
- (3) 正方形甲面積 = 正方形乙面積 + 正方形丙面積。
(填 $>$ 、 $=$ 或 $<$)



檢測概念

讓學生由圖感受畢氏定理，但還不須提及定理名稱。

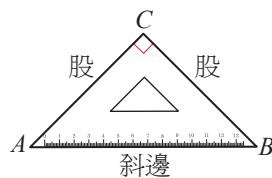
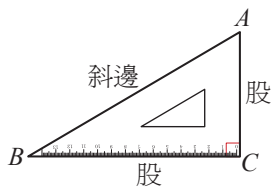
1 畢氏定理

小學時，我們曾學過直角三角形，

例如：我們常用的三角板就是直角三角形。

如下圖，在直角三角形 ABC 中，角 C 為直角（簡記為 $\angle C = 90^\circ$ ），

直角所對的邊稱為**斜邊**，另外兩邊稱為**股**。



在溫故啟思問題中的直角三角形 ABC ，我們可以發現分別以兩股長為邊所做的正方形面積和，會等於以斜邊為邊長所做的正方形面積。是不是所有的直角三角形都有如此的關係呢？

學習內容

S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。

G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。



探索活動

教學提醒 1

1. 在溫故啟思中，藉由面積關係讓學生「發現」畢氏定理；在探索活動中，則利用不同的直角三角形來說明畢氏定理的特性。同時，探索活動的問題與 P 97 的證明有關，盡量引導學生依序回答。
2. 讓學生能對畢氏定理「兩股長平方和等於斜邊長平方」的代數型式與其幾何意義連結。

1

畢氏定理的發現



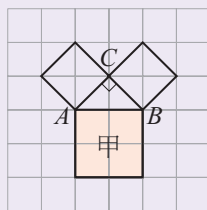
在下圖(一)， $\triangle ABC$ 中是一個等腰直角三角形，分別以此等腰直角三角形的兩股為邊長作兩正方形，這兩個正方形面積的和，與正方形甲的面積有何關係？

甲的面積 $= 2 \times 2 = 4$ ，

$\overline{AC}$ 為邊長的正方形面積 $= 2$ ，

$\overline{BC}$ 為邊長的正方形面積 $= 2$ ，

$2 + 2 = 4$ 。



圖(一)

答：相等；此時 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 。(填入 $<$ 、 $=$ 或 $>$)



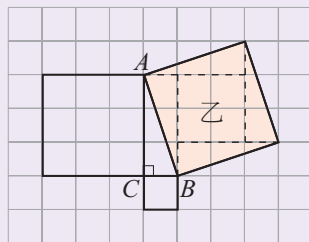
在下圖(二)中，分別以此直角三角形的兩股為邊長作兩正方形，這兩個正方形面積的和，與正方形乙的面積有何關係？

乙的面積 $= \frac{3}{2} \times 4 + 4 = 10$ ，

$\overline{AC}$ 為邊長的正方形面積 $= 9$ ，

$\overline{BC}$ 為邊長的正方形面積 $= 1$ ，

$9 + 1 = 10$ 。



圖(二)

答：相等；此時 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 。(填入 $<$ 、 $=$ 或 $>$)

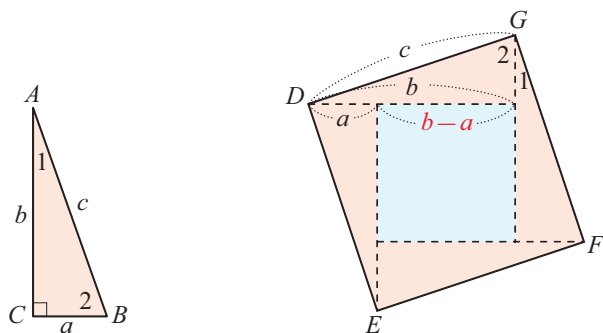
在探索活動的例子中，可以發現這兩個直角三角形兩股的平方和會等於斜邊的平方，一般直角三角形是否也有如此的性質？我們利用探索活動問題 2 中，正方形乙的分割方式來說明。

教學補給站

傳說無理數最早由畢達哥拉斯學派弟子希帕索斯發現，他證明出 $\sqrt{2}$ 無法用整數及分數表示，並引發了第一次數學危機。而畢達哥拉斯深任意數均可用整數及分數表示，不相信無理數的存在。因此當畢達哥拉斯發現 $\sqrt{2}$ 為無理數時，大為震驚。而希帕索斯因觸犯學派章程，向外人透露無理數的存在後，畢達哥拉斯便下令將其淹死。

動畫 畢氏定理

如下左圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\angle C = 90^\circ$ ，三邊長分別為 a 、 b 、 c 。
用 4 個與 $\triangle ABC$ 相同的直角三角形和一個小正方形，可以拼成一個四邊形 $DEFG$ （如下右圖），



- ① 因為直角三角形 ABC 中， $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 的和為 90° ，所以四邊形 $DEFG$ 的四個角都是 90° ，且四邊等長，邊長為 c ，因此四邊形 $DEFG$ 為正方形，且面積為 c^2 。

- ② 由圖可知面積 $c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2$
 $= 2ab + b^2 - 2ab + a^2$
 $= a^2 + b^2$ 。

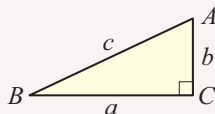
由上面的說明，我們得到了一個很重要的幾何定理：



畢氏定理

任一直角三角形 ABC 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，則兩股長平方和等於斜邊長平方，即 $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 。

$$a^2 + b^2 = c^2$$



2 教學提醒

畢氏定理在幾何問題中經常被拿來應用，老師應要求學生熟記此定理。

類題演練 配合課文

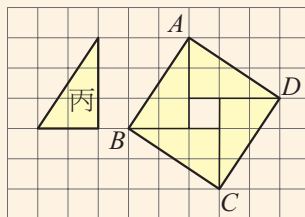
在右圖的方格紙中，每個小方格的邊長都是 1。試回答下列問題：

- (1) 直角三角形丙的斜邊長是多少？

解 ▶ $\sqrt{13}$ 。

- (2) 直角三角形丙的兩股長平方和是否等於斜邊長平方？

解 ▶ 是。



教學提醒 1

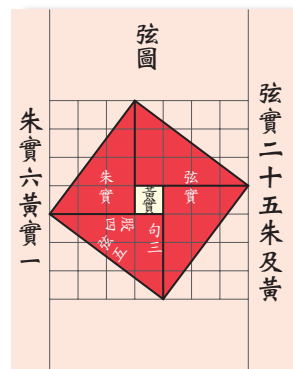
1

課文除了提供商高的證明方法，在數養廣角鏡另有補充其他證明方式，老師可視學生狀況補充。

據說是古希臘哲學家畢達哥拉斯（約公元前 569 年～500 年）或他的學生首次給出畢氏定理的證明。右圖為希臘 1955 年為了紀念畢氏學派建立 2500 年而發行的郵票。



畢氏定理這個重要的幾何定理，在不同文化的數學發展中都有發現，在中國傳統算法裡也曾出現過。右圖為中國古書《周髀算經》中出現的弦圖，商高回答周公的問題時，提到直角三角形中「勾廣三，股修四，徑隅五」的例子，因此這個定理也稱為商高定理（又稱勾股定理）。

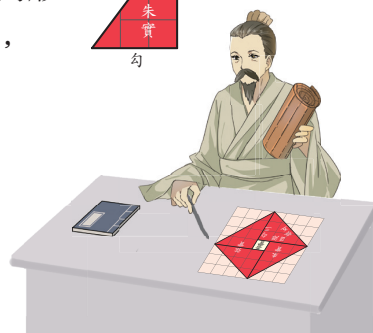


數養時光機

數學時光機：《周髀算經》

三國時吳國的趙爽為古算書《周髀算經》提到商高定理作注解時，配合上面的弦圖說到：「勾股相乘為朱實二，倍之為朱實四；以勾股之差自相乘為中黃實，加差實亦成弦實。」這個說法就是課本 P.97 上提供的方法。

- 1 一個朱實為一個紅色直角三角形，「勾×股」等於兩個紅色直角三角形，再乘以 2 等於四個紅色直角三角形。
- 2 黃實為中間的黃色正方形，邊長為「勾股之差」，面積為「勾股之差」的平方。
- 3 4 個朱實 + 1 個黃實等於弦實（大正方形），所以「 $勾 \times 股 \times 2 + (勾 - 股)^2 = 弦^2$ 」，由弦圖上的數據可知， $3 \times 4 \times 2 + (4 - 3)^2 = 5^2$ 。



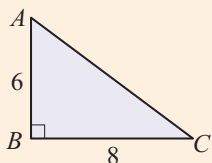
教學補給站

關於畢氏定理的證明相當的多，網路上亦有許多相關資源可應用於教學，以下連結之影片為 TED 關於畢氏定理的說明影片（有中文字幕）：（可掃描 QR code）
<https://youtu.be/YompsDIEdtc>

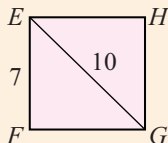


例 1 利用畢氏定理求長度

- (1) 求直角三角形 ABC 中，斜邊 $\overline{AC}$ 的長度。



- (2) 求矩形 $EFGH$ 中， $\overline{FG}$ 的長度。



- 解** (1) 由畢氏定理可知： $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ，
 亦即 $\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ ，
 因此 $\overline{AC} = \pm\sqrt{100} = \pm 10$ ，又因為邊長為正，故 $\overline{AC} = 10$ 。
- (2) 在矩形 $EFGH$ 中， $\triangle EFG$ 為直角三角形且 $\angle F$ 為直角，
 因此由畢氏定理可知： $\overline{EG}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2$ ，
 亦即 $10^2 = 7^2 + \overline{FG}^2$ ， $100 = 49 + \overline{FG}^2$ ， $\overline{FG}^2 = 100 - 49 = 51$ ，
 因此 $\overline{FG} = \pm\sqrt{51}$ ，又因為邊長為正，故 $\overline{FG} = \sqrt{51}$ 。

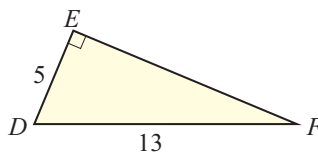
隨堂練習

- (1) 求右圖直角三角形 DEF 中，一股 $\overline{EF}$ 的長度。

$$13^2 = 5^2 + \overline{EF}^2, 169 = 25 + \overline{EF}^2,$$

$$\overline{EF}^2 = 169 - 25 = 144,$$

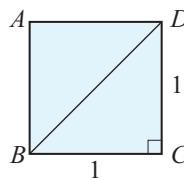
因此 $\overline{EF} = \pm 12$ ，又因為邊長為正，故 $\overline{EF} = 12$ 。



- (2) 求右圖正方形 $ABCD$ 中， $\overline{BD}$ 的長度。

$$\overline{BD}^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

因此 $\overline{BD} = \pm\sqrt{2}$ ，又因為邊長為正，故 $\overline{BD} = \sqrt{2}$ 。



類題演練 配合例題 1

- 已知直角三角形的兩股長分別為 5 與 7，試問斜邊長是多少？
- 已知直角三角形一股長為 $\sqrt{3}$ ，斜邊長為 2，試問另一股長是多少？
- 已知直角三角形的兩股長皆為 6，試問斜邊長是多少？

解 ▶ $\sqrt{74}$ 。

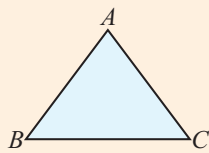
解 ▶ 1。

解 ▶ $6\sqrt{2}$ 。

例2 等腰三角形的高

已知等腰三角形 ABC 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求：

- (1) $\overline{BC}$ 上的高。
- (2) $\triangle ABC$ 的面積



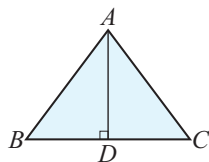
解 (1) 過 A 點作底邊 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}$ ，
因為等腰 $\triangle ABC$ 為線對稱圖形，
所以垂足 D 點為 $\overline{BC}$ 的中點，

$$\text{故 } \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

由畢氏定理知： $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ ，即 $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$

因此 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

$$(2) \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48。$$

**隨堂練習**

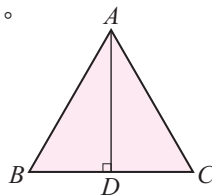
已知一正三角形 ABC 邊長為 10，求此正三角形的高與面積。

因為正 $\triangle ABC$ 為線對稱圖形，所以垂足 D 點為 $\overline{BC}$ 的中點，

$$\text{則 } \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 10 = 5，$$

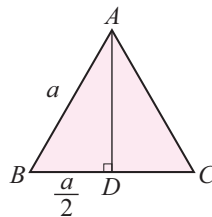
因此正三角形的高 $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$$\text{故正 } \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$



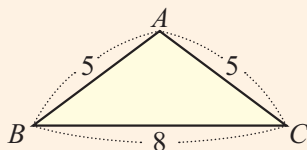
事實上，仿照例題 2 與隨堂練習的過程，我們可以得到當正三角形邊長為 a ($a > 0$) 時，

$$\text{高} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a；\text{面積} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2。$$

**類題演練** 配合例題 2

如右圖，已知一等腰三角形 ABC 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 8$ ，求此等腰三角形的高與面積。

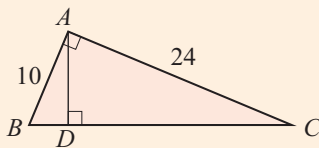
解 ▶ 高 = 3；面積 = 12。



例 3 斜邊上的高

如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC$ 是直角， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{AC}=24$ ，求：

- (1) 斜邊 $\overline{BC}$ 的長度。
- (2) 斜邊上高 $\overline{AD}$ 的長度。



解 (1) 因為 $\triangle ABC$ 為直角三角形，由畢氏定理知：

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 10^2 + 24^2 = 676,$$

$$\overline{BC} = \pm 26 \text{ (負數不合)}, \text{ 故 } \overline{BC} = 26.$$

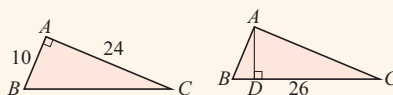
(2) 直角三角形 ABC 面積

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 10 \times 24 = \frac{1}{2} \times 26 \times \overline{AD},$$

$$\text{故 } \overline{AD} = \frac{10 \times 24}{26} = \frac{120}{13}.$$

$\triangle ABC$ 面積：



$$\frac{1}{2} \times 10 \times 24 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}.$$



隨堂練習

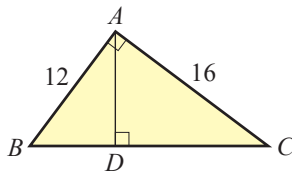
如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AC} = 16$ ，求斜邊上高 $\overline{AD}$ 的長度。

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$$

因為長度為正數，所以 $\overline{BC} = \sqrt{400} = 20$ 。

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 16 = \frac{1}{2} \times 20 \times \overline{AD}$$

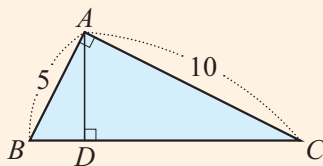
$$\Rightarrow \overline{AD} = \frac{12 \times 16}{20} = \frac{48}{5}$$



類題演練 配合例題 3

如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC$ 是直角， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AC}=10$ ，求斜邊上高 $\overline{AD}$ 的長度。

解 $\blacktriangleright 2\sqrt{5}$ 。



迷思診療

斜邊是哪一邊？

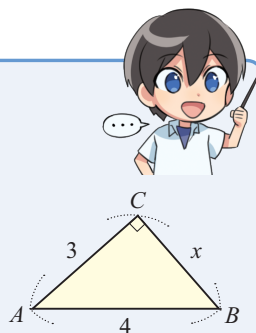
依霖在做畢氏定理的練習時，

她利用畢氏定理來解題，過程如下：

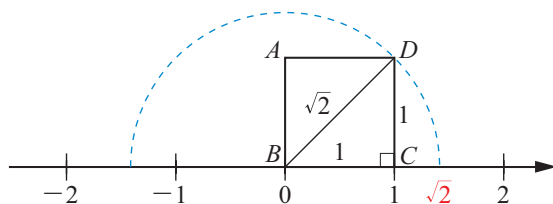
由畢氏定理知 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 得到 $4^2 + 3^2 = x^2$ ，

因此 $x = 5$ ，請問依霖的做法正確嗎？並請說明理由。

不正確。因為 x 並非為斜邊，所以正確應為 $3^2 + x^2 = 4^2$ ， $x^2 = 16 - 9 = 7$ ， $x = \pm\sqrt{7}$ （負不合）。



我們在 2-1 節作出了面積為 2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ ，如果將這一段的長度畫在數線上，即可在數線上找出坐標為 $\sqrt{2}$ 的點，如下圖。那麼其他的平方根也可在數線上找到相對應的點嗎？



探索活動

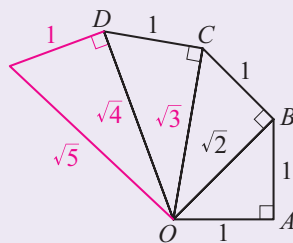
畫出長度為 $\sqrt{5}$ 的線段

根據右圖，回答下列問題：

- (1) 哪一段長度為 $\sqrt{3}$ ？

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2, \overline{OC} = \sqrt{3}。$$

- (2) 在右圖上依照同樣的方式作出一股長為 1 的直角三角形，畫出長度為 $\sqrt{5}$ 的線段。



在探索活動中，我們可依序畫出長度為 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ ……的線段，仿照同樣的方法，只要調整直角三角形的兩股長，就可畫出特定的方根。（可參考附錄二及附件7，摺出畢氏螺線。）

教學補給站

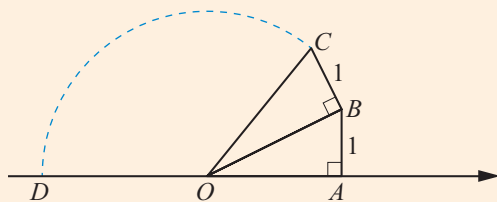
我們也可利用摺紙的方式摺出平方根，同時如探索活動的過程，可將連續的平方根摺出成為螺線的形式，詳細過程可參考以下連結的影片內容：（可掃描 QR code）

<https://youtu.be/DLEfGOHATuY>



例 4 找出坐標為 $\sqrt{a}$ 的點

如右圖，在數線上， O 為原點， A 點坐標為 2，且在直角三角形 OAB 與 OBC 中， $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ ，試問：



- (1) $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 的長度分別為何？
- (2) 若 $\overline{OD} = \overline{OC}$ ，則 D 點坐標為何？

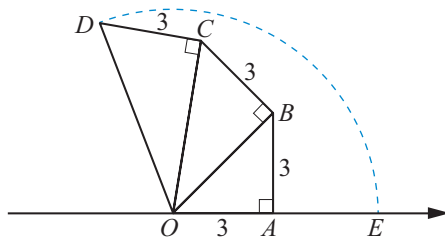
1 教學提醒

例題 4 的目的在於讓學生知道「可以在數線上找出 $\sqrt{a}$ 的位置」。

- 解**
- (1) 因為 $\triangle OAB$ 與 $\triangle OBC$ 皆為直角三角形，
由畢氏定理可知： $\overline{OB}^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ ，故 $\overline{OB} = \sqrt{5}$ ，
 $\overline{OC}^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 = 6$ ，故 $\overline{OC} = \sqrt{6}$ 。
 - (2) 因為 $\overline{OD} = \overline{OC} = \sqrt{6}$ ，
所以 D 點在原點左邊 $\sqrt{6}$ 個單位長，故 D 點坐標為 $-\sqrt{6}$ 。

隨堂練習

如右圖，在數線上， O 為原點，且在直角三角形 OAB 、 OBC 與 OCD 中， $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 3$ ，試問：

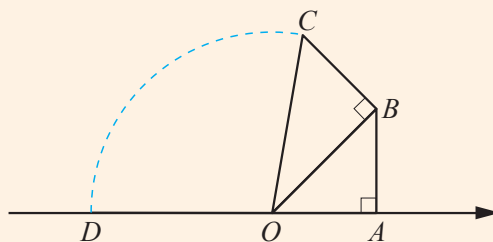


- (1) $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 、 $\overline{OD}$ 的長度分別為何？
 $\overline{OB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$ ，
 $\overline{OC} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ，
 $\overline{OD} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{36} = 6$ 。
- (2) 若 $\overline{OE} = \overline{OD}$ ，則 E 點坐標為何？
 因為 $\overline{OE} = \overline{OD} = 6$ ，
 所以 E 點在原點右邊 6 個單位長，故 E 點坐標為 6。

類題演練 配合例題 4

如右圖， O 點為數線原點， A 點坐標為 3，在直角三角形 OAB 與 OBC 中， $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ ，且 $\overline{OD} = \overline{OC}$ ，則 D 點坐標為何？

解 ▶ $-3\sqrt{3}$



2 畢氏定理的生活應用

畢氏定理是很重要的幾何定理，在生活中也有相當多的應用，接下來我們就來看幾個例子。

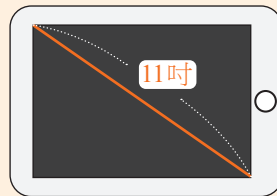


家庭

例5 畢氏定理的應用(I)



目前常見的平板螢幕長寬比大約都在 10 : 7 左右，同時以螢幕對角線的長度標示為螢幕的尺寸。小新家裡新買的一臺 11 吋的平板，若以 10 : 7 的比例計算長與寬，那麼這臺平板的螢幕長約為多少吋？



解 因為螢幕的長：寬 = 10 : 7，設長為 $10r$ ，寬為 $7r$ ， $r > 0$ ，
由畢氏定理可知： $(10r)^2 + (7r)^2 = 11^2$ ， $149r^2 = 121$ ，

$$r^2 = \frac{121}{149}, r = \pm \frac{11}{\sqrt{149}} \text{ (負數不合),}$$

$$\text{故長為 } 10 \times \frac{11}{\sqrt{149}} = \frac{110\sqrt{149}}{149} \text{ 吋}$$

如果需要 $\frac{110\sqrt{149}}{149}$ 的近似值，

可利用計算機計算得

$$\frac{110\sqrt{149}}{149} \div 9.01 \text{ (吋)}$$



隨堂練習

小新的爺爺家中有一臺舊的螢幕長寬比為 4 : 3 的電視，爺爺說這是 20 吋的電視，那麼螢幕的寬約為多少吋呢？

因為螢幕的長：寬 = 4 : 3，假設長為 $4t$ 吋，寬為 $3t$ 吋， $t > 0$ ，

由畢氏定理可知： $(4t)^2 + (3t)^2 = 20^2$ ， $25t^2 = 400$ ，

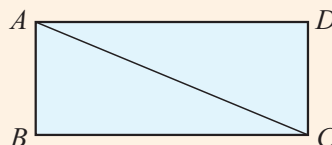
$$t^2 = 16, t = \pm 4 \text{ (負數不合),}$$

故寬為 $3 \times 4 \text{ (吋)} = 12 \text{ (吋)}$ 。

類題演練 配合例題 5

如右圖，已知長方形 $ABCD$ 的邊長比為 12 : 5，且對角線 AC 長為 26，那麼 AD 長多少？

解 ▶ 24



例 6 畢氏定理的應用(II)



環境

某天依霖的空拍機卡在樹上拿不下來，如圖(一)。她拿了一把梯子斜靠在樹上，爬上梯子想要取下空拍機。已知梯子長 250 公分，試問：

- (1) 若梯腳離樹根 150 公分遠，則梯頂離地面的高度為多少公分？
- (2) 她發現擺放高度不夠，將梯腳往前移動了 80 公分後，如圖(二)所示，梯頂剛好與空拍機位置的高度相同，空拍機離地面多少公分？

1 教學提醒

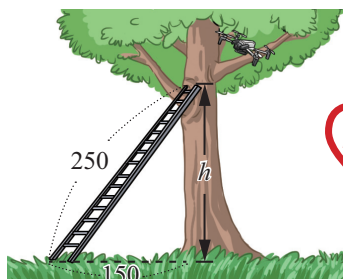
日常生活中有許多問題都可以應用畢氏定理來解決，例如：旗桿的高度測量。

2 教學提醒

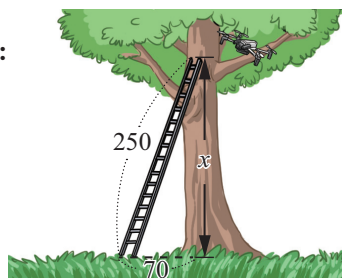
- (1) 此題需提醒學生注意利用畢氏定理算出來的值是否為題目所需。同時需注意算出的答案取整數近似值時，需符合題意要求。
- (2) 等號左右兩邊若皆為一元二次的式子之化簡，在 4-1 節才會正式教學，教師在命題時要避免此題型。

解 (1) 設此時梯頂離地面的高度為 h 公分，
由畢氏定理可知：
 $250^2 = h^2 + 150^2$ ， $62500 = h^2 + 22500$ ，
 $h^2 = 40000$ ， $h = \pm 200$ (負數不合)，
即此時梯頂離地面 200 公分。

- (2) 假設梯頂離地面高度為 x 公分，
又此時梯腳離樹根 70 公分，由畢氏定理可知：
 $250^2 = 70^2 + x^2$ ， $x^2 = 62500 - 4900 = 57600$ ，
因此 $x = \pm\sqrt{57600} = \pm 240$ (負數不合)，
可得空拍機離地 240 公分。



圖(一)



圖(二)

隨堂練習

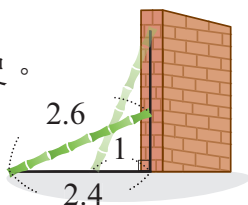
如右圖，一根長 2.6 公尺的竹竿擺放在牆邊，與牆面、地面形成一個直角三角形，且竹竿底部離牆面底部 1 公尺。一段時間之後，竹竿忽然往下滑動到竹竿底部距離牆面底部 2.4 公尺後停止，此時竹竿頂部下滑了多少公尺？

由畢氏定理得 $\sqrt{2.6^2 - 1^2} = \sqrt{5.76} = 2.4$ (公尺)，

即竹竿頂離地面的高度為 2.4 (公尺)，

下滑後竹竿頂部離地面的高度為 $\sqrt{2.6^2 - 2.4^2} = 1$ (公尺)

因此頂部下滑了 $2.4 - 1 = 1.4$ (公尺)。



教學小幫手

可搭配：
習作 P 27~28
習題 1~4。

類題演練 配合例題 6

已知戶政事務所在警察局西方 500 公尺處，郵局在戶政事務所北方 1200 公尺處，則郵局與警察局的直線距離為多少公尺？

解 ► 1300 公尺。

3 距離公式

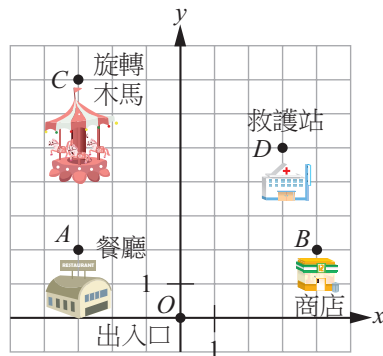


環境

依霖到遊樂園去玩，拿了張園區地圖，其中部分地點如右圖，那麼該怎麼計算這些點之間的距離呢？

在第二冊中，我們學過利用直角坐標系來描述平面上每一點的位置，因此在右圖中，若以 O 點為原點，可知 $A(-3, 2)$ 、 $B(4, 2)$ 、 $C(-3, 7)$ 、 $D(3, 5)$ ；而在第一冊中，我們學過數線上 $P(a)$ 、 $Q(b)$ 兩點的距離為 $|a - b|$ ，我們可以將這樣的方法應用在坐標平面上來求得任意兩點間的距離，再配合比例尺即可知地圖上這些地點的距離。

動畫 距離公式



例7 水平、鉛垂線上兩點的距離

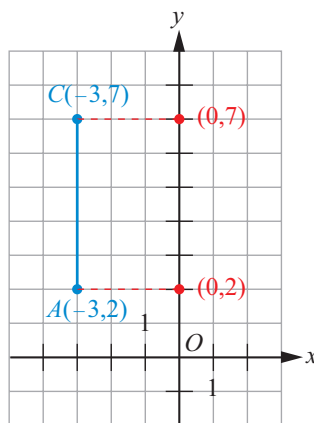
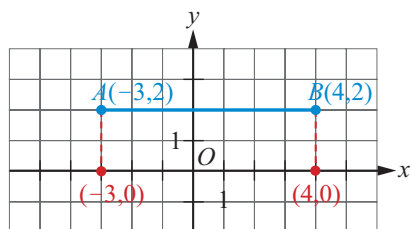
教學提醒 ①

在說明距離公式的型式之前，學生應充分理解水平與垂直兩點間距離的表示方式，再由數字特例過渡到文字符號的表示。

- (1) 坐標平面上， $A(-3, 2)$ 、 $B(4, 2)$ 兩點的距離是多少？
- (2) 坐標平面上， $A(-3, 2)$ 、 $C(-3, 7)$ 兩點的距離是多少？

解

- (1) 如圖 A 、 B 在同一條水平線上，所以 $\overline{AB} = |4 - (-3)| = 7$ 。
- (2) 如圖 A 、 C 在同一條鉛垂線上，所以 $\overline{AC} = |2 - 7| = 5$ 。



類題演練 配合例題 7

求下列各題中兩點的距離：

(1) $A(-1, \frac{1}{3})$ 、 $B(-1, -\frac{7}{9})$ 解 ▶ $\frac{10}{9}$ 。

(2) $C(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{5})$ 、 $D(0, 4\frac{1}{5})$ 解 ▶ $\frac{1}{2}$ 。

由例題 7 可知：

- 1 在同一條水平線上， $A(x_1, b)$ 、 $B(x_2, b)$ 兩點的距離，就是其 x 坐標之差的絕對值，即 $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$ 。
- 2 在同一條鉛垂線上， $C(a, y_1)$ 、 $D(a, y_2)$ 兩點的距離，就是其 y 坐標之差的絕對值，即 $\overline{CD} = |y_2 - y_1|$ 。

隨堂練習

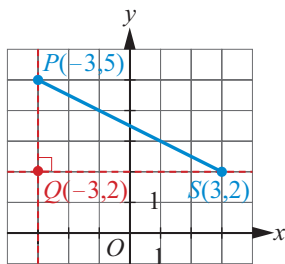
求下列各題中兩點的距離：

- (1) $A(\frac{1}{2}, -3)$ 、 $B(-2, -3)$ (2) $C(1, -3)$ 、 $D(1, 5)$

$$\overline{AB} = |-2 - \frac{1}{2}| = \frac{5}{2}$$

$$\overline{CD} = |5 - (-3)| = 8$$

如果兩點不在同一條水平線或鉛垂線上時，我們可以仿照例題 7 的方式求得距離。例如要求 $P(-3, 5)$ 與 $S(3, 2)$ 的距離，分別作過 P 點的鉛垂線與過 S 點的水平線，兩線交於 $Q(-3, 2)$ ，如右圖，先計算 $\overline{SQ} = |-3 - 3| = 6$ ，再計算 $\overline{PQ} = |5 - 2| = 3$ ，因此由畢氏定理可得 $\overline{PS} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 。

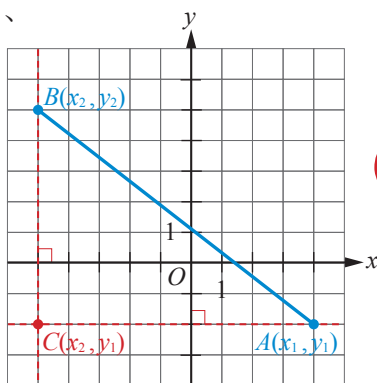


一般而言，對於坐標平面上任意兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 的距離，如右圖，利用例題 7 的結論，先過 A 點作水平線，過 B 點作鉛垂線，設此兩線交於 C 點，則 $\triangle ABC$ 為直角三角形， C 點坐標為 (x_2, y_1) 。

因此 $\overline{AC} = |x_2 - x_1|$ ， $\overline{BC} = |y_2 - y_1|$ ，

由畢氏定理可知： $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ ，因此

$$\overline{AB} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



2 教學提醒

求兩點的距離時，用哪一點當被減數都沒有關係，但是為了與高中向量課程銜接，盡量寫成後面的點減前面的點。

類題演練 配合課文

A 點的坐標為 $(-1, 5)$ ， B 點的坐標為 $(4, -2)$ ，過 A 點作 x 軸的垂線，過 B 點作 y 軸的垂線，兩點交於一點 C ，求：

- (1) C 點的坐標。 解 ▶ $(-1, -2)$ 。
- (2) $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長度。 解 ▶ $\overline{AC} = 7$ ， $\overline{BC} = 5$ 。
- (3) $\overline{AB}$ 的長度。 解 ▶ $\sqrt{74}$ 。

由以上討論可知：



距離公式

給定坐標平面上任意兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則 A 、 B 的距離

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x \text{ 坐標的差})^2 + (y \text{ 坐標的差})^2}。$$

例8 距離公式的應用

已知坐標平面上 $A(4, -2)$ 、 $B(2, 4)$ 、 $C(-3, -1)$ 三點，則 $\triangle ABC$ 的周長是多少？

解

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + [4-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

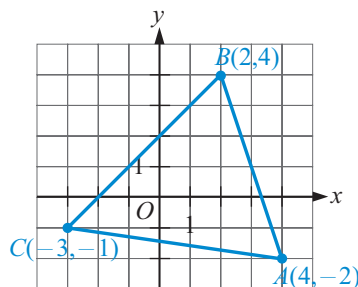
$$\overline{BC} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-4)^2}$$

$$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-3-4)^2 + [-1-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周長} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2\sqrt{10} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{10} + 10\sqrt{2}。$$



隨堂練習

已知坐標平面上 $A(-1, 3)$ 、 $B(1, -1)$ 、 $C(4, 3)$ 三點，則 $\triangle ABC$ 的周長為多少？

$$\overline{AB} = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{[4-(-1)]^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周長} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2\sqrt{5} + 5 + 5 = 10 + 2\sqrt{5}。$$

類題演練 配合例題8

已知坐標平面上 $A(3, 1)$ 、 $B(-5, -1)$ 、 $C(1, -7)$ 三點，則三角形 ABC 的周長為何？

解 ▶ $6\sqrt{2} + 4\sqrt{17}$ 。



環境

1 教學提醒

需提醒學生注意問題所提供的坐標為地圖上的單位長，因此依據坐標計算兩點距離後，需根據比例尺調整為實際距離。

教學小幫手

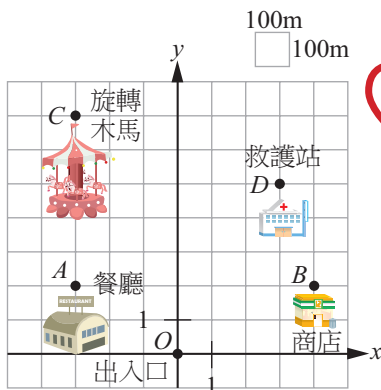
可搭配：
習作 P 29
習題 5。

回到一開始的問題，若依霖想計算旋轉木馬到救護站的距離，我們就可以利用前面所學的來幫助她，在遊樂園區的地圖上，以出入口為原點，加上兩條垂直的坐標軸後形成坐標平面後的地圖，如右圖。若地圖上每個正方形格線的邊長為 100 公尺，那麼旋轉木馬所在的 $C(-3, 7)$ 與救護站所在的 $D(3, 5)$ 距離為多少公尺呢？由距離公式可知

$$\overline{CD} = \sqrt{[3 - (-3)]^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}。$$

由比例尺可知地圖上 1 單位長為 100 公尺，

因此旋轉木馬與救護站間的距離約為 $100 \times \sqrt{40} \div 632$ (公尺)。



2-3 重點整理

1 畢氏定理

任一直角三角形 ABC 中，兩股長平方和等於斜邊長平方，如右圖， $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 。



例 若一直角三角形的兩股長分別為 5 和 12，
則其斜邊長 $= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ 。

2 距離公式

給定坐標平面上任意兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則 A 、 B 兩點的距離

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x \text{ 坐標的差})^2 + (y \text{ 坐標的差})^2}。$$

例 若 $A(2, 3)$ 、 $B(5, 7)$ ，
則 $\overline{AB} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。

類題演練 配合課文

坐標平面上， A 點的坐標為 $(4, 14)$ ， B 點的坐標為 $(-1, 2)$ ，求 $\overline{AB}$ 的長度。

解 ▶ 13。



2-3 自我評量

(每格 10 分) P.99 例 1 P.100 隨堂

- 1 (1) 直角三角形中，若兩股長分別為 3 與 4，則斜邊長為 5。
 (2) 已知直角三角形的一股長為 5，斜邊長為 9，則另一股長為 $2\sqrt{14}$ 。
 (3) 有一正三角形的邊長為 6，則此正三角形的高為 $3\sqrt{3}$ ，面積為

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}。$$

$$(1) \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$(2) \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}。$$

$$(3) \text{正三角形的高為 } \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}, \text{面積為 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}。$$

- 2 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 和 $\angle ACD$ 都是直角。若 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{CD} = 3$ ，則 $\overline{AD}$ 的長度為何？

- (A) $\sqrt{38}$ (B) $\sqrt{29}$ (C) $\sqrt{21}$ (D) $\sqrt{20}$

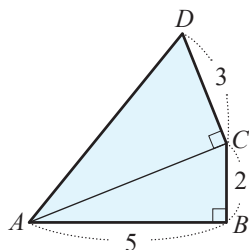
答：(A)。

$$\overline{AC} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\overline{AC}^2 = (\sqrt{29})^2 = 29$$

$$\overline{AD} = \sqrt{29 + 3^2} = \sqrt{38}$$

P.103 例 4



教學補給站

西方國家稱為「畢達哥拉斯定理」或「畢氏定理」。在中國，《周髀算經》記載了勾股定理的一個特例，相傳是在商代由商高發現，故又稱之為商高定理，有時亦用「勾股弦定理」或「陳子定理」等名稱。

- 3 如右圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle BAC$ 為直角， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 15$ ，求斜邊上高 $\overline{AD}$ 的長度。

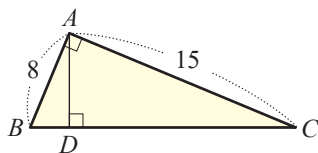
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 8^2 + 15^2 = 289，$$

$$\text{可得 } \overline{BC} = \sqrt{289} = 17。$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 15 = \frac{1}{2} \times 17 \times \overline{AD}$$

$$\text{故得 } \overline{AD} = \frac{8 \times 15}{17} = \frac{120}{17}。$$

P.101 例 3



挑戰會考題

內政部規範無障礙坡道之坡度(高度與水平長度之比值)不得大於 $\frac{1}{12}$ 。已知上下兩平台的高度差為 20 公分，則在符合設計規範的前提下，坡道的長度至少需多少公分？

- (A) $10\sqrt{145}$ (B) $20\sqrt{145}$ (C) $10\sqrt{29}$ (D) $20\sqrt{29}$

解►(B)。

P.107 課文

4 求坐標平面上，下列各組兩點間的距離：

(每小題 10 分)

(1) $A(2, 8)$ 、 $B(-5, 7)$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(-5-2)^2 + (7-8)^2} \\ &= \sqrt{49+1} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2) $C(2, -1)$ 、 $D(6, -5)$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \sqrt{(6-2)^2 + [-5-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{16+16} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

5 如右圖，公園裡有一個鞦韆，最低處為 A 點，已知盪到最高處的 B 點時，其中 C 點為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AO}$ 的垂足， $\overline{OC} = 60$ ，離地面的高度為 70 公分，且 A 、 B 兩點的水平距離為 80 公分，試求此鞦韆在 A 點時離地面多少公分？

(8 分)

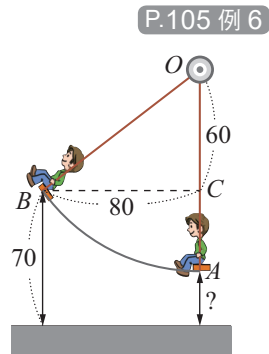
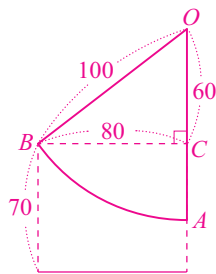
如右圖，因為 $\overline{OC} = 60$ ， $\overline{BC} = 80$ ，

由畢氏定理可知：

$$\overline{OB} = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{10000} = 100,$$

因此鞦韆擺盪的半徑長為

$$\overline{OA} = \overline{OB} = 100 \text{ (公分)},$$

故 A 點離地面的高度為 $(60 + 70) - 100 = 30$ (公分)。

戶外

類題演練 配合第 4 題

求坐標平面上，下列各組兩點間的距離：

(1) $A(4, 7)$ 、 $B(7, 10)$ 解 ▶ $3\sqrt{2}$ 。

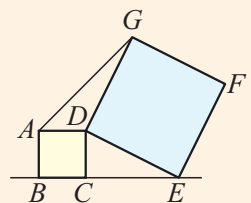
(2) $C(1, 2)$ 、 $D(8, 26)$ 解 ▶ 25。

歷屆試題 精熟題

如右圖，平面上有正方形 $ABCD$ 與正方形 $DEFG$ ，其中 E 點在直線 BC 上，若 $\overline{AE} = 3\sqrt{10}$ ， $\triangle CDE$ 與 $\triangle ADG$ 的面積均為 9，則五邊形 $ABEFG$ 的面積為何？

(A) 63 (B) 72 (C) 81 (D) 90

解 ▶ (B)。



《109.特招》(桃連區) 題序第 14 題

✕ 錯誤診療



已知正方形 $ABFG$ 與正方形 $BCDE$ 的面積分別為 4 和 3，
 以下是小明、小英與小美三個人由右圖所得到的結論：

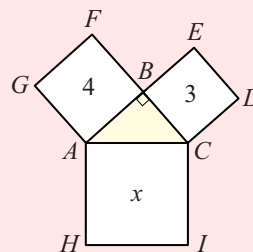
小明：在右圖中，因為 $x^2 = 3^2 + 4^2$ ，所以 $x=5$

小英：由畢氏定理可以得到

正方形 $ABFG$ 面積 + 正方形 $BCDE$ 面積
 = 正方形 $AHIC$ 面積

小美：由畢氏定理可以得到

正方形 $ABFG$ 周長 + 正方形 $BCDE$ 周長
 = 正方形 $AHIC$ 周長



請判斷三人的結論是否正確，如果錯誤請更正：

(12分)

小明：☐ 正確 ☒ 錯誤（請打✓）

更正： $x = \overline{AC}^2$

由畢氏定理可以得到 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 4 + 3 = 7$ ，故 $x = 7$ 。

小英：☒ 正確 ☐ 錯誤（請打✓）

更正：

小美：☐ 正確 ☒ 錯誤（請打✓）

更正：畢氏定理為兩股長平方和等於斜邊長的平方。

$\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ， $\overline{AC} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$ ，

正方形 $ABFG$ 周長 + 正方形 $BCDE$ 周長 $= 4 \times 2 + 4 \times \sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}$ ，

正方形 $AHIC$ 周長 $= 4\sqrt{7}$ ，

兩式不相等。