

彰化縣114學年度溪湖國民中學校長及教師公開授課活動

教學活動設計單

領域/科目	數學		教學者	許宜玲
實施年級	七年級		教學時間	1 節課(45 分鐘)
單元名稱	質因數分解			
學校願景				
設計理念	熟練質因數及標準分解式運算運算			
學習重點	學習表現	n-IV-1 理解因數、倍數、質數、最大公因數、最小公倍數的意義及熟練其計算，並能運用到日常生活的情境解決問題。。	核心素養	A 自主行動 ☐ A1 身心素質與自我精進 ☒ A2 系統思考與解決問題 ☐ A3 規劃執行與創新應變 B 溝通互動 ☒ B1 符號運用與溝通表達 ☐ B2 科技資訊與媒體素養 ☐ B3 藝術涵養與美感素養 C 社會參與 ☐ C1 道德實踐與公民意識 ☒ C2 人際關係與團隊合作 ☐ C3 多元文化與國際理解
	學習內容	N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。 N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。 2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。		

議題融入	涯-J2 具備生涯規劃的知識與概念。	
教材來源	翰林教科書	
教學設備 /資源	黑板、多媒體設備、學習單	
學習目標	1. 認識質因數及標準分解式 2. 熟練質因數及標準分解式	
教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	備註
一、引起動機 複習因數、倍數概念。 讓同學分組排因數字卡並填寫學習單。	5 分鐘	因數字卡排排樂
二、課程活動 1. 認識質數、質因數。 2. 利用因數找出質因數。 3. 樹狀圖、短除法、標準分解式 教師講解題目，並由同學口頭回 答、練習課本隨堂題目，再請同學 上台練習講解。	35 分鐘	
三、綜合活動 1. 教師總結課程內容 2. 學習單練習(課後練習題)	5 分鐘	
參考資料： 翰林文教事業教科書		

上課課程內容

P91

2 質數與合數

在國小我們學過：

- ① 如果一個大於 1 的整數，只有 1 和本身兩個因數，稱此數為質數。
例如：2、3、5、7、11 的因數都只有 1 和本身，所以 2、3、5、7、11 都是質數。
- ② 如果一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為合數。例如：6 的因數有 1、2、3、6，所以 6 是合數。
- ③ 1 既不是質數，也不是合數。
- ④ 2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

例 5 質數與合數的判別

自評 P98 第 2 題

判別 12 和 17 這兩個數是質數還是合數？

解

12 的因數有 1、2、3、4、6、12，所以 12 是合數。

17 的因數只有 1、17，所以 17 是質數。

隨堂練習

1. 最小的質數為_____，最小的合數為_____。

2. 判別 23 和 27 這兩個數是質數還是合數？

P92

對於一個 100 以內的數是否為質數，有沒有方法可以篩檢呢？

古希臘的數學家埃拉托賽尼（Eratosthenes，西元前 276 — 西元前 194）發現了一個方法，可以簡化逐一判別每個數是否為質數的步驟，這個方法稱為「埃拉托賽尼篩法」，以下將利用探索活動來了解他的想法。

探索活動 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 1： 因為 1 不是質數，
也不是合數，所以刪去 1。

步驟 2： 剩下的數最小是 2，
圈出 2 並刪去其餘 2 的倍數。

②此步驟刪去的數最小是_____。

步驟 3： 剩下的數最小是 3，
圈出 3 並刪去其餘 3 的倍數。

③此步驟刪去的數最小是_____。

步驟 4： 剩下的數最小是 5，
圈出 5 並刪去其餘 5 的倍數。

④此步驟刪去的數最小是_____。

步驟 5： 剩下的數最小是 7，
圈出 7 並刪去其餘 7 的倍數。

⑤此步驟刪去的數最小是_____。

步驟 6： 將剩下的數全部圈起來。

⑥此時所有圈出來的數是否都是質數？☐是 ☐否

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Thinking

1. 由步驟 2～步驟 5 中，每個步驟圈出的數與所刪去的最小數，有什麼關係呢？
2. 利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只需使用質數 2、3、5、7 篩檢即可，而不需使用 11 或更大的質數篩檢？

由探索活動可知，利用埃拉托賽尼篩法篩檢小於 100 的質數，只需使用 2、3、5、7 篩檢即可，且 100 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共 25 個數。

補給站 質數的個數

質數、合數與 1 構成了所有的正整數，而合數的個數顯然有無限多個（例如：所有 10 的倍數都是合數），於是我們想問：質數的個數也有無限多個嗎？或是存在著一個「最大的質數」，所有比此數大的整數都是合數？

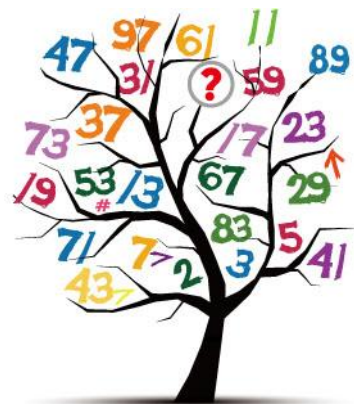
早在西元前三世紀，希臘大數學家歐幾里德（Euclid of Alexandria，西元前 325 — 西元前 265）在其名著《幾何原本》（*Elements*）中，就對這個問題提出了解答，證明了質數的個數有無限多個。

較小的質數很容易判斷，例如：2、3、5、7、11、…… 等；但是較大的質數要如何搜尋呢？我們可利用電腦強大的運算及判斷能力，來發掘更多的質數。



樹上 1~100 的質數好像還少了一個，

? 要填入什麼數呢？



答：_____。

3 標準分解式

如果 a 是 b 的因數，且 a 是質數，就稱 a 為 b 的質因數。

例如： $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$ ，15 的因數有 1、3、5、15，其中 3、5 是質數，

所以 3、5 為 15 的質因數。

例 6 因數與質因數

自評 P98、99 第 3、6 題

列出 45 的所有因數，並寫出哪些是 45 的質因數。

解

$$45 = 1 \times 45$$

$$= 3 \times 15$$

$$= 5 \times 9$$

因此 45 的因數有 1、3、5、9、15、45，

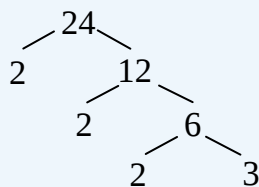
其中 3、5 是質數，所以 3、5 為 45 的質因數。

隨堂練習

列出 40 的所有因數，並寫出哪些是 40 的質因數。

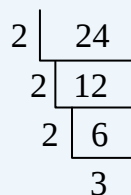
在國小時，我們學過利用樹狀圖或短除法將一個正整數完全分解為幾個質因數的乘積。例如：

樹狀圖



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

短除法



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

P95

這樣將一個大於 1 的正整數完全分解為幾個質因數連乘積的過程，稱為這個正整數的**質因數分解**。在數學上，為了方便溝通起見，約定做完質因數分解後，把較小的質因數寫在前面，較大的寫在後面，遇有相同的質因數連乘時，就以指數形式表示，像這樣的表示方式，稱為這個正整數的**標準分解式**。

例如： $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$2^3 \times 3$ 稱為 24 的標準分解式，其中 2 與 3 都是 24 的質因數。

例 7 標準分解式

自評 P98 第 4 題

將 1020 寫成標準分解式，並求出 1020 的相異質因數。

解

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 1020} \\
 2 \overline{) 510} \\
 3 \overline{) 255} \\
 5 \overline{) 85} \\
 17
 \end{array}$$

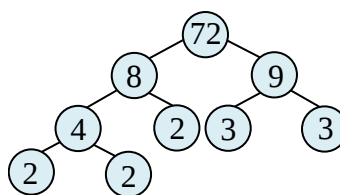
$$1020 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 17$$

所以 1020 的相異質因數有 2、3、5、17。

隨堂練習

1. 右圖是成俊用樹狀圖將 72 完全分解為質因數乘積的過程，寫出 72 的標準分解式。



2. 將 990 寫成標準分解式，並求出 990 的相異質因數。

P96

接下來，我們要學習如何利用標準分解式來判別因數與倍數，做為用標準分解式求最大公因數與最小公倍數的預備。

例如：5 是否為 5^2 的因數？

5^2 是否為 5 的倍數？

因為 $5^2 = 5 \times 5$

可被 5 整除，

所以 5 是 5^2 的因數，

5^2 是 5 的倍數。

又如： 5^2 是否為 5^3 的因數？

5^3 是否為 5^2 的倍數？

因為 $5^3 = 5 \times 5 \times 5$

可被 $5 \times 5 (=5^2)$ 整除，

所以 5^2 是 5^3 的因數，

5^3 是 5^2 的倍數。

例 8 以標準分解式判別因數與倍數

自評 P99 第 5 題

判別 $2^3 \times 7$ 是否為 $2^2 \times 7$ 的倍數。

解

因為 $2^3 \times 7 = (2 \times 2 \times 7) \times 2 = (2^2 \times 7) \times 2$ ，

又 $(2^2 \times 7) \times 2$ 是 $2^2 \times 7$ 的倍數，

所以 $2^3 \times 7$ 是 $2^2 \times 7$ 的倍數。

隨堂練習

1. 下列哪些數是 $2^2 \times 3^2$ 的因數？

在 ☐ 中打「✓」。

☐ 2

☐ $2^2 \times 3^3$

☐ $2 \times 3 \times 5$

☐ 2×3^2

2. 下列哪些數是 $2^2 \times 3$ 的倍數？

在 ☐ 中打「✓」。

☐ 2×3^2

☐ $2^3 \times 3$

☐ $2^3 \times 3^2$

☐ $2^2 \times 3^2 \times 5$

2-1 質因數分解學習單

課程內容：標準分解式

班級：七年____班 座號：____ 姓名：____



一、課程複習：

1. 回答下列問題：

(1) 最小的質數是_____。(2) 最小的合數是_____。

(3) 奇數中，最小的質數是_____。

(4) 91 是質數還是合數？答：_____。

2. 20 的因數中，有哪些為質數？答：_____。

3. 欲使 n 個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成矩形，且不會剩下任何小正方形，則：(1) 若 $n=15$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

(2) 若 $n=17$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

(3) 若 $n=18$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

(4) 若 $n=36$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

二、課程練習：



1. 若 2448 的標準分解式為 $2^a \times 3^b \times c$ ，則 $a=$ _____, $b=$ _____, $c=$ _____。

2. 將 1062 用短除法做質因數分解的過程如右，則

$a=$ _____, $b=$ _____。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1062} \\ 3 \overline{) \quad a} \\ \quad b \end{array}$$

3. 將下列各數做質因數分解並寫出它的標準分解式。

(1) $60=$ _____。(2) $345=$ _____。

(3) $117=$ _____。(4) $456=$ _____。

(5) $336=$ _____。(6) $936=$ _____。

(7) $2475=$ _____。(8) $3375=$ _____。



4. 若 2448 的標準分解式為 $2^a \times 3^b \times c$ ，則 $a=$ _____, $b=$ _____, $c=$ _____。

5. 將 1062 用短除法做質因數分解的過程如右，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1062} \\ 3 \overline{) \quad a} \\ \quad b \end{array}$$

6. 小原設定手機解鎖的密碼為 $abcd$ 四碼，若他是利用 1080 的標準分解式 $2^a \times b^c \times d$ 來設計密碼，請問此組密碼為何？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。